

MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet Budapest



ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ
ВЕНГЕРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
И
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

/Результаты достигнутые при совместной работе по теме
"Решение математических вопросов проектирования
электронных устройств на больших и средних интеграль-
ных схемах с помощью вычислительных машин."/

Будапешт, 1982.

Budapest, 1982.

A kiadásért felelős:

DR VAMOS TIBOR

ISBN 963 311 143 9

ISSN 0324-2951

ВВЕДЕНИЕ

С 1976 по 1980 годы Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и Исследовательский институт вычислительной техники и автоматизации Венгерской Академии наук проводил совместные работы в соответствии с протоколом о научном сотрудничестве между ВАН и АН Арм. ССР на 1976-1980 гг. по теме "Решение математических вопросов проектирования электронных устройств на больших и средних интегральных схемах с помощью вычислительных машин".

В процессе совместной работы усилиями обеих сторон было выявлено много нерешенных задач, которые необходимо было решать для выполнения работ по автоматизации проектирования электронных устройств.

Много из этих задач были формализованы и приведены к математическим задачам теории графов, булевых функций, массовому обслуживанию и другим, над решением которых и трудились указанные коллективы. Кроме решения этих задач ИИВТА проведены много конкретных разработок и построены программные модели различных алгоритмов для проверки их практичности и эффективности на ЭВМ. Большинство из полученных, как совместно, так и отдельно, результатов уже опубликованы в различных изданиях.

Необходимо отметить, что это сотрудничество было специфичное, одна из его специфик заключалась в том, что сотрудничали, с одной стороны, специалисты с инженерами или техническим оборудованием, а с другой стороны, специалисты с математическим оборудованием. Несмотря на это, такое сотрудничество, как показала пятилетняя работа, была очень плодотворной. Эта совместная работа не только показала возможность и плодотворность такого сотрудничества, но и более того, в связи с оказанием взаимного влияния друг на друга, специалисты с техническим оборудованием в пользу себя стали лучше мыслить формально, а математики лучше понимать реальные задачи.

В этот совместный сборник включены некоторые результаты, которые не опубликованы за это время. Кроме того, этот сборник является некоторым символическим документом указывающим завершения определенного этапа совместных работ. Этот же сборник содержит изложение многих новых практически важных нерешенных задач, что свидетельствует о необходимости и целесообразности дальнейших совместных работ.

ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВОЧНОЕ РАСШИРЕНИЕ ДВУЗНАЧНЫХ /БУЛЕВЫХ/ ФУНКЦИЙ

К. Пасторне-Варга, М. Ужоки

Исследовательский институт вычислительной техники
и автоматизации Венгерской Академии наук

1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Как известно, для описания работы электронного оборудования используются функции двузначной логики. Соответственно этому установим следующее.

а/ Проектирование электронных узлов можно рассматривать как поиск такой формулы Φ функции f , описывающей действие желаемого узла, которая представляется конечной суперпозицией базисной функции /функции, реализованы через электронный функциональный набор элементов/. Реализация такой формулы - это узел, построенный из функциональных элементов, осуществляющих базисные функции. Как пример, на рис. 1 и рис. 2 покажем два узла для реализации одноразрядного сумматора. Таблица истинности для сложения:

a_1	b_1	c_1	s	c
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

a_1, b_1 - слагаемые

c_1 - перенос из предыдущего разряда

c - перенос в последующий разряд

s - сумма

б/ Анализ спроектированной схемы с использованием двужначных функций уже сложнее.

Схема, реализующая какую-либо формулу, на выходе задает значения функции, относящихся к данной комбинации переменных функций, заданных на входах. "Расчет" предназначаемого значения на выходе - это длящийся по времени процесс, так как нужно время для изменения сигналов /рис. 3/, а также для расчета значения функции из прибывающей комбинации сигналов на вход основных функциональных элементов, реализующих базисные функции /рис. 4/. После изменения входных сигналов схемы в определенных внутренних

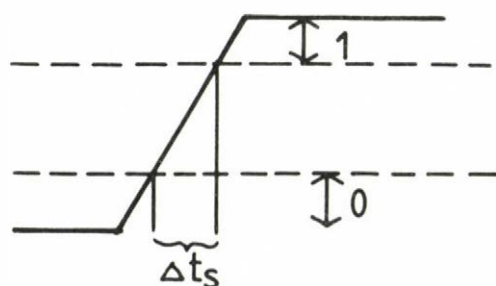


Рис. 3.

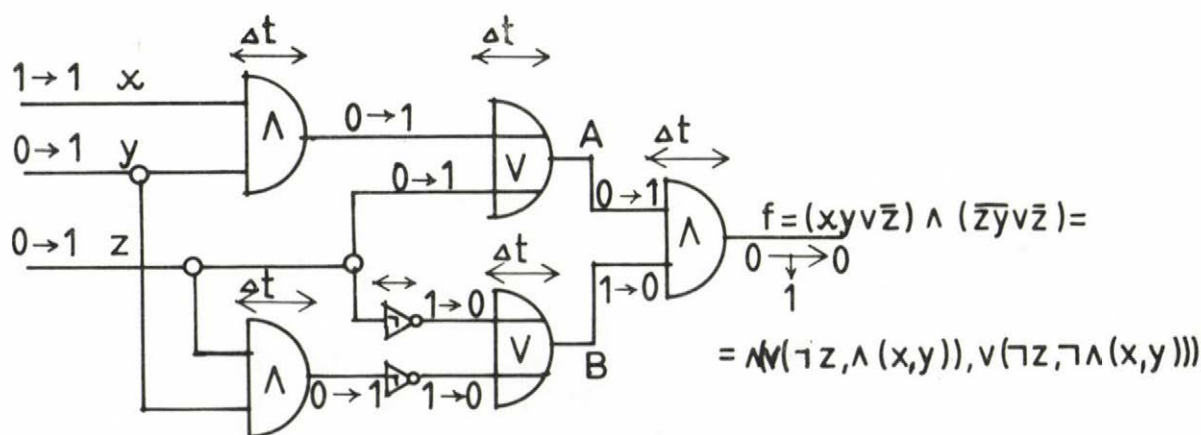


Рис. 4.

них точках схемы и на выходе до времени ΔT в принципе находятся неизвестные значения. На рис. 4 можно проследить влияние изменения значений y и z с 0 до 1. Где возникает изменение, там в течение времени изменения текущее значение неизвестно, т.е. /для простоты/ 0 или 1. Для анализа временного действия схемы наряду со значениями 0 и 1 целесообразно ввести третье значение для "неизвестного" логического значения, что в нашем случае по смыслу покрывает множество значений $\{0, 1\}$. Это последнее /третье/ значение надо полагать во время изменения во внутренних точках сети. Существующее на выходе значение не изменяется под влиянием выше описанного изменения, так как $f(1, 0, 0) = f(1, 1, 1) = 0$. В противовес этому, если на проводе А значение 1 появляется быстрее, чем 0 на проводе В, тогда на выходе схемы происходит изменение $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$. Это появление паразитной логической 1 называется явлением статического состязания. Состязание может вести к ошибочной работе схемы, поэтому при анализе схемы надо стремиться найти это явление.

в/ Для тестирования схемы надо искать такие входные комбинации $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ под действием которых на выходе ошибочных узлов появляются логические значения, отклоняющиеся от безошибочных. Итак, обозначим функцию, описывающую неисправную схему, f_h

$$f_h(\underline{\alpha}) = \bar{f}(\underline{\alpha}) \quad \text{т.е.} \quad \{f_h(\underline{\alpha}), f(\underline{\alpha})\} = \{0, 1\}$$

Неисправность схемы в большинстве случаев можно представить таким образом, что на каком-то проводе может появляться логическое значение, отклоняющееся от безошибочного. Возможно, целесообразно при описании ошибок предполагать присутствие на соответствующем проводе значения $\{0, 1\}$, упомянутого при анализе, и ожидать, чтобы комбинация значений $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ выполняло условие $f_h(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \{0, 1\}$.

2. ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВОЧНОЕ РАСШИРЕНИЕ

При анализе работы спроектированной схемы для выражения изменения, а также для описания ошибочного действия при анализе ошибки естественным представляется введение третьего значения. Из литературы известно, что проходят исследования в трехзначной логике [1, 2, 3]. Более тонкое исследование внесли с собой введение для более точной установки информации, относящейся к "неизвестному", более одного нового значения. Известны выполненные исследования на моделях с введением 2^x , 3^x и даже 7 новых значений [4, 5]. Введение моделей с точки зрения математики означает определенное расширение функций двузначной логики до функций многозначной логики. В дальнейшем f_x обозначает функцию, полученную расширением из функции f .

Такое расширение функции тогда правильно, если полученные расширением функции хорошо описывают исследуемые явления. В случае определенной проблемы целесообразно исследовать:

- какие расширения функции соответствуют задаче и
- какими алгебраическими свойствами обладает класс функций, полученный расширением.

В литературе обычно на вопросы нельзя найти точный ответ. В большинстве расширения эвристические и только исследуют, с какими операциями можно и стоит работать для того, чтобы можно было решить основную задачу.

Поставленную в 1 пункте задачу анализа и теста можно также определить следующим образом. Необходимо решить, влияет ли на значение реализованной функции появляющееся /неизвестное или неопределенное/ значение $\{0, 1\}$ на каком-либо проводе схемы, другими словами, влияет ли возможное значение $\{0, 1\}$ функции из суперпозиции Φ .

а/ Рассмотрим сначала анализ явления состязания.

Допустим, что при переходе $\underline{\alpha} \rightarrow \underline{\beta}$ изменяется только i -тый входной сигнал, т.е. $\underline{\beta} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$. Во время изменения схема в принципе дает или $f(\underline{\alpha})$, или $f(\underline{\beta})$ значение. Расширим функцию f так, чтобы как каждый аргумент, так и функция могли принять значение $\{0, 1\}$. Выше описанное явление можно выразить расширенной функцией f_r следующим образом.

$$f_r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \{0, 1\}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = \{f(\underline{\alpha}), f(\underline{\beta})\}$$

В случае одновременного изменения $n-k$ входных сигналов, аргумента f_r возможно такое состоящее из B^n -ных точек 2^{n-k} -мерное множество $/k = 1, 2, \dots, n /$, где $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}$ фиксированные значения координат $i1, i2, \dots, ik$ точек, остальные любые.^{1/} Значение же функции - это то множество значений функций $f(\underline{\gamma})$ в точках $\underline{\gamma} \in B^n$ из области аргумента f_r , т.е. $\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$. Это расширение функции точки-точка f преобразует в функцию множество-множество f_r , которая сохраняет свойства объединения:

$$f_r\left(\bigcup_{i=1}^l \underline{\alpha}^i\right) = \bigcup_{i=1}^l f(\underline{\alpha}^i)$$

В предыдущем пункте мы видели, что статическое состояние может появляться тогда, если $f(\underline{\alpha}) = f(\underline{\beta})$. При выполнении этого условия при переходе $\alpha \rightarrow \beta$ возможны следующие случаи:

- $k=1$, т.е. $B_{\alpha_{i1}}^{n, i1} = \{\underline{\alpha}, \underline{\beta}\}$. Если есть соответственной суперпозиции Φ создает явление состязания, тогда существует /по крайней мере/ одна такая внутренняя точка сети /такая внут-

^{1/} Такие множества точек в созвучие с тем, как B^n имеют булевым кбom, называют обычно подкубами и обозначают $B_{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}}^{n, i1, i2, \dots, ik}$ [6].

ренная функция в Φ /, что появляющиеся там γ и $\bar{\gamma}$ значения на выходе сети дадут отклоняющийся результат и под действием еще $\underline{\alpha}$ или уже $\underline{\beta}$ туда и попадают. Это значит, что суперпозиция, состоящая из функций расширения $b_{1r}, b_{2r}, \dots, b_{mr}$ базисных функций b_1, b_2, \dots, b_m из Φ реализуют не f_r . Другими словами, в этом случае суперпозиция и расширение нельзя заменить друг другом.

- $k > 1$ и $f(B_{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}}^{n, i1, i2, \dots, ik}) = \{\rho\}$ / ρ - какое-либо логическое значение/, тогда положение подобно выше описанному, так как $f(\underline{\gamma}) = \rho$, если $\underline{\gamma} \in B_{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}}^{n, i1, i2, \dots, ik}$, т.е. появление значения $\bar{\rho}$ в ранее изложенных обстоятельствах представляется возможным.

- $k > 1$, $f(\underline{\alpha}) = f(\underline{\beta})$, но $f(B_{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}}^{n, i1, i2, \dots, ik}) = \{0, 1\}$. Тогда переход $\underline{\alpha} \rightarrow \underline{\beta}$ сам по себе приносит явление состязания.

1. Определение. Если в суперпозиции Φ , описывающей функцию $f_r \neq \Phi_r$, тогда в реализуемой Φ сети появляется состязание.

2. Определение. Если $f(B_{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}}^{n, i1, i2, \dots, ik}) = \{\rho\}$ и $\Phi_r \neq f_r$, тогда состязание можно уничтожить составлением такой суперпозиции Ψ , для которой $\Psi_r = f_r$. Отсутствие явления состязания характеризует инвариантная на расширении суперпозиция.

в/ Исследуем проблему теста.

В случае если ошибка в узле на i -том входном соединении делает неизвестным логическое значение, тогда эту ошибку выявляют те множества $\tau = B_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n}^{n, 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n}$ для которых

$$f_r(\tau) = \{0, 1\}.$$

Если ошибка находится во внутренней точке, тогда ошибку выявляют ρ -ые комбинации значений $(\rho = \overbrace{n, i_1, i_2, \dots, i_k}^{n, i_1, i_2, \dots, i_k})$, для которых как значение $\Phi_\rho(\rho)$, так и дающее ошибку на соединении значение внутренней функции $\Phi_\rho(\rho) - \{0, 1\}$.

Из сказанного до этого ясно, что для обслуживания выше обсуждаемых проблем может служить здесь описанное расширение. Это расширение следующее.

Пусть $B = \{0, 1\}$ и $\mathcal{B} = \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

Представим f отображение $B^n \rightarrow B$. Полученная расширением функция f_ρ дает такое преобразование $\mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$, на котором

$$f_\rho(\delta) = f_\rho\left(\bigcup_{i=1}^l \underline{\alpha}^i\right) = \bigcup_{i=1}^l f(\underline{\alpha}^i)$$

где $\delta = \bigcup_{i=1}^l \underline{\alpha}^i$, $\underline{\alpha}^i \in B^n$.

Это свойство назовем свойством сохранения объединения.

3. НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Множество функций, полученных выше описанным расширением — это действительное подмножество трехзначных функций. Ниже перечислим несколько проблем, возникающих при исследовании возможности применения и исследования алгебраических свойств этого множества функций.

- а/ Образуют ли полученные расширением функции на суперпозицию закрытый класс?
- б/ Что обуславливает возможность заменяемости суперпозиции и расширения в формуле?
- в/ Существует ли в двузначной логике такой класс функций, где заменяемы суперпозиция и расширение [6]?

- г/ Каким образом можно найти к данной функции f такую формулу Φ , где заменяемы суперпозиция и расширение?
- д/ Какие проблемы электронных узлов можно еще описать этими средствами?
- е/ Какую потерю информации несет с собой метод обсуждения, основанный на выше описанном расширении?

Обобщение

В данной работе мы даем расширение двузначных функций, соответствующее целям анализа схем и нахождения ошибок, и ставим проблемы, связанные с полученным классом функций.

S U M M A R Y

In this paper the two-valued functions and their three-valued extensions are examined for the analysis of an electronic circuit. It will be demonstrated that the class of these extended functions correctly characterises the functioning of the circuits and it plays an important role in the investigation of static hazards.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Muth Peter: A nine-Valued Circuit Model to Generate Tests for Sequential Circuits
Institute for Information Processing at the University of Karlsruhe, Germany
2. Putzolu R, Roth J.P.: A Heuristic Algorithm for the Testing of Asynchronous Circuits
IEEE-Trans. on Computers, June 1971

3. Muth Peter: Erstellen von Fehlererkennungs-Experimenten für Schaltnetze und Schaltwerke unter Verwendung eines neun-wertigen Schaltungsmodells
Nachrichtentechn. Fachberichte, Band 49, 1974,
VDE-Verlag Berlin.
4. Fantauzzi, G.: An Algebraic Model for the Analysis of Logical Circuits
IEEE-Trans. on Computers, June 1974
5. Fantauzzi, G.: An Algebraic Model for the Analysis of Logical Circuits
Dep. Computer Science, Univ. Iowa, Iowa City,
Techn. Rep. 72-04, July 1972
6. Петросян, А.В.: Некоторые дифференциальные свойства Булевых функций. В данном сборнике.

НЕКОТОРЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

А.В. Петросян

Понятия активность аргументов булевых функций и помехоустойчивость булевых функций введены в работе 1, в дальнейшем эти понятия использовались во многих работах. В работе 2 рассмотрены вопросы активности элементов схем, с помощью которого разработан метод построения функционально эквивалентной схемы с повышенной надежностью. В связи с тем, что эти понятия нигде систематически не изложены, то в данной работе излагаются и некоторые частично уже известные /например, некоторые из дипломных работ моих дипломников/ факты, относящиеся к этим понятиям. Излагаются также те задачи, которые исходят из практики проектирования ЭВМ и могут быть решены на основе теории активностей.

Для определенности приведем определения некоторых понятий и их свойства, несмотря на то, что большинство из них уже общеизвестны.

1. НОРМА И ЕЕ СВОЙСТВА

Рассмотрим множество булевых функций P_2 . Элементы или векторы пространства B^n обозначим через $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$

Нормой функции $f(\tilde{x})$ назовем величину:
$$\|f\| = \frac{1}{2^n} \sum_{\tilde{\alpha} \in B^n} f(\tilde{\alpha})$$

Приведем некоторые свойства нормы:

$$1/ \ 0 \leq \|f\| \leq 1 \quad (\|f\| = 0) \equiv (f=0), \quad (\|f\| = 1) \equiv (f=1),$$

$$2/ \ | \|f\| - \|g\| | \leq \|f \oplus g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

$$3/ \ \| \bar{f} \| = 1 - \|f\|,$$

$$4/ \quad \| f \| = \frac{1}{2^k} \sum_{(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}) \in E^k} \| f_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}^{i_1, i_2, \dots, i_k}(\tilde{x}) \|, \text{ где}$$

$f_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}^{i_1, i_2, \dots, i_k}(\tilde{x})$ — частичная функция, которая получается от $f(\tilde{x})$ после постановки в ней места аргументов $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ постоянные $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ соответственно.

$$5/ \quad \| f(x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \dots, x_n^{\sigma_n}) \| = \| f(x_1, x_2, \dots, x_n) \|.$$

2. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЁ НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА

Производной функции $f(\tilde{x})$ по совокупности переменных $u = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ называется следующая функция:

$$\frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}} \equiv \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial u} = f(x_1, \dots, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, \dots, x_n) \oplus f(x_1, \dots, \bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_k}, \dots, x_n).$$

Приведем некоторые очевидные свойства производной

$$1/ \quad \frac{\partial c}{\partial u} = 0,$$

$$2/ \quad \frac{\partial (f \oplus g)}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} \oplus \frac{\partial g}{\partial u},$$

$$3/ \quad \frac{\partial \bar{f}(\tilde{x})}{\partial u} = \frac{\partial f(\tilde{x})}{\partial u}.$$

Говорят, что функция $f(\tilde{x})$ фиктивно зависит от аргумента x_i или x_i является фиктивной переменной для функции $f(\tilde{x})$, если для любого $\tilde{\alpha} \in E^n$, $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \bar{\alpha}_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$

$$4/ \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \right) \equiv (x_i \text{ фиктивный аргумент функции } f(\tilde{x})).$$

5/ $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ фиктивно зависит от x_i .

6/ $(\frac{\partial f}{\partial x_i} = 1) \equiv (f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i^{\sigma_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{\sigma}_2, x_{i+1}, \dots, x_n))$

Приведем еще некоторые более интересные и глубокие свойства, которые подробно описаны в работах [7, 8].

7/ Теорема 1. Все первые производные одной переменной определяют функцию с точностью отрицания.

Доказательство. Пусть все производные равны нулю, тогда по свойству 4/ функция тождественно постоянная. Теперь, если все производные одной переменной двух функций совпадают, то для их суммы по модулю два и по свойству 2/ получится нулевой случай. откуда и получится доказательство теоремы.

Эта теорема подтверждает возможность восстановления, а следующая формула дает алгоритм восстановления функции с помощью ее всех производных по одному переменному:

$$f(\tilde{x}) = x_1^{\sigma_1} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \oplus x_2^{\sigma_2} \frac{\partial f(\bar{\sigma}_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} \oplus \dots \oplus x_n^{\sigma_n} \frac{\partial f(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_{n-1}, x_n)}{\partial x_n} \oplus f(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n),$$

для любого $\sigma_1: \sigma_2, \dots, \sigma_n$.

Легко доказывается и следующая теорема.

Теорема 2. Значение всех производных /имеется в виду не только первые производные/ одной переменной и самой функции в одной фиксированной точке однозначно определяют функцию.

Причем, формула для восстановления имеет вид:

$$f(\tilde{x}) = f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \oplus x_1^{\bar{\sigma}_1} \frac{\partial f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)}{\partial x_1} \oplus \dots \oplus x_n^{\bar{\sigma}_n} \frac{\partial f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)}{\partial x_n} \\ \oplus \dots \oplus x_{i_1}^{\bar{\sigma}_{i_1}} x_{i_2}^{\bar{\sigma}_{i_2}} \dots x_{i_k}^{\bar{\sigma}_{i_k}} \frac{\partial^k f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \oplus \dots \oplus \\ \oplus x_1^{\bar{\sigma}_1} x_2^{\bar{\sigma}_2} \dots x_n^{\bar{\sigma}_n} \frac{\partial f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} .$$

3. АКТИВНОСТИ И НЕКОТОРЫЕ ИХ СВОЙСТВА

Активностью вектора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ по совокупности аргу-
ментов $u = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\}$ для функции $f(\tilde{x})$ назовем вели-
чину:

$$\omega_u^f(\tilde{\alpha}) = \frac{\partial f(\tilde{\alpha})}{\partial u}$$

На основании этой величины, которая зависит от трех параметров f, u и $\tilde{\alpha}$, определим другие понятия по следующему принципу.

- 1/ Если рассмотреть нормированную сумму по всем $\tilde{\alpha}$, то получим величину, которую назовем активностью совокупности переменных u , ее обозначим через $\omega_u^f = \frac{1}{2^n} \sum_{\tilde{\alpha} \in B^n} \omega_u^f(\tilde{\alpha})$

Легко заметить, что $\omega_u^f = \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \right\|$.

- 2/ Полной активностью функции f по множеству векторов $A = \{\tilde{\alpha}\}$ назовем величину $\Omega_A^f = \sum_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in A} (f(\tilde{\alpha}) \oplus f(\tilde{\beta}))$.

В принципе все введенные понятия активности можно рассмотреть ни на всем множестве B^n , а на его подмножестве.

- 3/ Полной активностью совокупности переменных u назовем величину $\Omega_u^f = \sum_{v \leq u} \omega_v^f$

- 4/ Величина, которая получается при фиксировании количества переменных и суммированием по всевозможным k переменным, характеризует активность вектора $\tilde{\alpha}$ по k -переменным, обозначим через $\omega_k^f(\tilde{\alpha}) = \sum_{v/|iv|=1} \omega_v^f(\tilde{\alpha})$

Другие две характеристики активностей связаны с функцией Шеннона.

- 5/ Величину $L(\omega_k^f) = \max_{\tilde{\alpha}} \omega_k^f(\tilde{\alpha})$ назовем активностью функции по k переменным. И наконец,

- 6/ Величину $L_R(\omega_k^f) = \min_{f \in R} L(\omega_k^f) = \min_{f \in R} \max_{\tilde{\alpha} \in B^n} \omega_k^f(\tilde{\alpha})$ назовем минимальной активностью булевых функций на множестве R .

Приведем некоторые свойства этих величин:

- 1/ $\omega_u^f(\tilde{\alpha})$ равна нулю или единице, $0 \leq \omega_u^f \leq 1$, причем
 $(\omega_{x_i}^f = 0) \equiv (f(\tilde{x}) \text{ фиктивно зависит от } x_i)$,
 $(\omega_{x_i}^f = 1) \equiv (f(\tilde{x}) = x_i \oplus f_0^i(\tilde{x}))$
 $0 \leq \omega_u^f(\tilde{\alpha}) \leq 2^{|u|}$, $0 \leq \omega_k^f \leq C_n^k$,
 $0 \leq L(\omega_k^f) \leq C_n^k$, $0 \leq L_R(\omega_k^f) \leq C_n^k$.

- 2/ Для величин $\omega_u^f(\tilde{\alpha})$, ω_u^f , $\Omega_u^f(\tilde{\alpha})$, Ω_u^f , $\omega_k^f(\tilde{\alpha})$, $L(\omega_k^f)$ имеет место следующее утверждение. Для любых $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ эти величины для функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $f^{\sigma}(x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \dots, x_n^{\sigma_n})$ соответственно совпадают.

Это свойство дает возможность классифицировать булевые функции, с одной стороны, с помощью отрицания, т.е. две функции φ и ψ будем считать эквивалентными, если существуют $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ так, что $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi^{\sigma}(x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \dots, x_n^{\sigma_n})$.

С другой стороны, классифицировать функции можно с помощью активностей, а именно: две функции назвать эквивалентными, если активности их аргументов по совокупности переменных равны. Вопрос о том, насколько соответствующие классы этих эквивалентностей совпадают полностью, не решен. Однако полученные результаты говорят о том, что в основном они не совпадают.

Функция, для которой классы эквивалентности по отрицанию и по активности совпадают, называется устойчивой функцией. В [3] доказано, что пороговые функции являются устойчивыми функциями. Кроме того, там же приведен класс неустойчивых функций мощности 2^{2^n-1} .

3. Для любого i имеет место следующее соотношение:

$$1 - \frac{\omega_{x_i}^f}{2} \geq \|f\| \geq \frac{\omega_{x_i}^f}{2}$$

откуда следует, что если для какого-либо i $\omega_{x_i}^f = 1$, то $\|f\| = \frac{1}{2}$

4. Если $\omega_{x_i}^f = 0$, то $f(\tilde{x})$ фиктивно зависит от x_i .

5. $\Omega_X^f = \Omega_X^{\bar{f}} = 2^{n+1} \|f\| \cdot \|\bar{f}\|$, где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

6. Необходимым и достаточным условием для $\|f\| = \frac{1}{2}$ является условие $\Omega_X^f = 2^{n-1}$

7. Функции, содержащиеся в классе эквивалентности по отрицанию, которые содержат монотонную функцию, назовем обобщенными монотонными функциями. Для обобщенных монотонных функций имеет место равенство:

$$\omega_{x_i}^f = \left| \|f_1^i\| - \|f_0^i\| \right|.$$

8. Величина $\omega_{x_1}^f, \omega_{x_2}^f, \dots, \omega_{x_n}^f, \|f\|$ дает полную информацию

о пороговости функции f [4], откуда непосредственно следует известная верхняя оценка для количества пороговых функций 2^{n^2} .

4. ДИНАМИЧЕСКИЙ ТЕСТ ПРОВЕРКИ СХЕМ.

Легко заметить, что если $\omega_u^f(\tilde{\alpha})=1$, то вектор $\tilde{\alpha}$ активизирует любую схему, реализующую функцию f по отношению к группе входов, соответствующих переменным u . При одновременной замене значений на этих входах правильно работающей схемы должно меняться значение выхода схемы. Ошибки в схеме, которые приводят к тому, что значения на выходе схемы не будут меняться, будут обнаружены.

Определение. Пусть задано некоторое множество подмножеств переменных u . Тогда множество $T_u^f = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ назовем динамическим тестом функции $f(\tilde{x})$ для u , если для любой совокупности переменных $u = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}\}$ из u существует вектор $\tilde{\alpha} \in T_u^f$, так что $\omega_u^f(\tilde{\alpha})=1$. Число s назовем длиной динамического теста.

Ясно, что в этом случае, как и при обычных тестах, задача также заключается в нахождении полных минимальных динамических тестов для функции, или минимальные тесты, проверяющие определенного типа ошибки, например, одиночные ошибки на входах или в схеме.

Динамический тест имеет определенные преимущества по сравнению с обычными тестами. Динамические тесты во всех случаях короче обычных тестов и дают возможность проверять схемы в динамическом режиме, изменяя значение активных наборов любой необходимой частотой. Поэтому изучение вопросов, связанных с генерацией и оценкой сложности динамических тестов, представляет самостоятельный интерес.

Однако необходимо отметить, что ни для любого множества u и

любой функции существует динамического теста. Действительно, для линейной функции не существует такого вектора $\tilde{\alpha}$, для которого $\omega_u^f(\tilde{\alpha})=1$, когда u содержит четное число переменных.

Вначале рассмотрим динамические тесты для проверки одиночных ошибок. В этом случае будем предполагать, что $u=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, т.е. требуется, чтобы тесты содержали вектора активные по каждому из переменных в отдельности.

Для одиночных ошибок имеют место следующие утверждения.

Утверждение 1. Длина минимальных динамических тестов одиночных ошибок для линейных функций равна единице.

Это утверждение очевидно, т.к. любой вектор $\tilde{\alpha}$ является активным вектором для любого x_i .

Утверждение 2. Длина минимальных динамических тестов в симметричных непостоянных функций не более двух.

Как известно, симметрические функции определяются номерами слоев (S_1, S_2, \dots, S_k) , на которых она равна единице. Рассмотрим два случая.

1. Имеется изолированный слой, т.е. такой слой B_ℓ^n , на котором функция принимает значение σ , а на верхнем и нижнем соединением слоях $B_{\ell-1}^n$ и $B_{\ell-2}^n$ принимает значение $\bar{\sigma}$. Этому случаю подходит и случай, когда изолированным является или слой B_0^n или B_n^n . Ясно, что в этом случае любой вектор $\tilde{\alpha}$ из слоя B_ℓ^n будет динамическим тестом, т.к. для любого i $\omega_{x_i}^f(\tilde{\alpha})=1$.

2. Изолированного слоя не имеется. В этом случае, если функция не постоянная, то будет существовать два соседних слоя, на которых функция принимает разные значения, скажем, B_ℓ^n и $B_{\ell+1}^n$.

Ясно, что для любого вектора $\tilde{\alpha}$ из V_{ℓ}^n , $\omega_{x_i}^f(\tilde{\alpha})=1$, если $\alpha_i=0$, а также для любого вектора $\tilde{\beta}$ из $V_{\ell+1}^n$, $\omega_{x_i}^f(\tilde{\beta})=1$, если $\beta_i=1$. Теперь, если взять вектор $\tilde{\alpha} \in V_{\ell}^n$ произвольным, а вектор $\tilde{\beta}$ совпадающим с $\tilde{\alpha}$ во всех координатах кроме одной, которая для $\tilde{\alpha}$ равна нулю, а для $\tilde{\beta}$ равна единице, то ясно, что эти два вектора составят динамический тест.

Чтобы иметь представление о количествах симметрических функций, которые имеют динамический тест длины один, приведем количество функций первого типа и второго типа.

Как известно, количество симметрических функций n переменных равно 2^{n+1} . Легко установить, что среди них функции второго типа, т.е. функции, для которых длина минимального динамического теста равна 2, имеется всего $F_n = \frac{2}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ штук. Эти величины совпадают с числами Фибоначчи и имеют порядок $\approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \approx 1,6^n$. Остальные $2^{n+1} - F_n$ функции имеют динамический тест длины 1. Отношение количества этих функций будет $\approx 1,6^n / 2^n \rightarrow 0$. Так что можно утверждать, что почти все симметричные функции имеют динамический тест длины один.

Утверждение 3. Для того, чтобы функция f имела минимальный динамический тест длины один, необходимо и достаточно, чтобы $L(\omega_1^f) = n$

Действительно, если $L(\omega_1^f) = n$, это означает, что существует $\tilde{\alpha}$ так, что $\omega_1^f(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \omega_{x_i}^f(\tilde{\alpha}) = n$, а это означает, что для любого i $\omega_{x_i}^f(\tilde{\alpha}) = 1$, т.е. $\tilde{\alpha}$ является динамическим тестом. И наоборот, если $\tilde{\alpha}$ является динамическим тестом, то это означает, что для любого i , $\omega_{x_i}^f(\tilde{\alpha}) = 1$ или $\omega_1^f(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \omega_{x_i}^f(\tilde{\alpha}) = n$ откуда следует, что $L(\omega_1^f) = n$

Количество таких функций, которые имеют тест единичной длины,

не так уж мало. Из факта, что распределение числа булевых функций с фиксированным числом нульмерных максимальных интервалов пуассоновское, доказанное в работе [5], непосредственно следует, что количество функций, имеющих тест единичной длины, асимптотически эквивалентно величине

$$2^{2^n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \approx 0,4 |P_n|$$

5. АКТИВНОСТЬ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Из предыдущего параграфа видно, что длина динамического теста существенно связана с активностью функций. Поэтому изучим некоторые вопросы, связанные с активностью функций. Как уже установлено, количество функций, активность которых по одному переменному равна $\sim 0,4 |P_n|$.

Теперь изучим вопрос активности остальных функций.

Для этого рассмотрим величину R_{k_0} , равную количеству функций, для которых $L(\omega_1^f) \geq k_0$. Ясно, что $R_{k_0} \geq \sum_{k=k_0}^n C_n^k 2^{n-k} = \frac{2^{2^n}}{2^n} \sum_{k=k_0}^n C_n^k$. Если для некоторого $k_0(n) \sum_{k=k_0}^n C_n^k \sim 2^n$, то тогда можно утверждать, что почти все булевы функции n переменных имеют активность по отдельным аргументам не меньше $k_0(n)$. Поэтому необходимо определить максимальное значение k_0 , для которого $\sum_{k=k_0}^n C_n^k \sim 2^n$. Для этого воспользуемся известной оценкой [6]:

$$\sum_{k=\lambda n}^n C_n^k \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda(1-\lambda)}} \frac{\lambda}{2\lambda-1} \frac{2^{nH(\lambda)}}{\sqrt{n}}, \quad \text{где } \lambda > \frac{1}{2},$$

$$H(\lambda) = -\lambda \lg \lambda - (1-\lambda) \lg (1-\lambda).$$

Легко получить равенство

$$H(\lambda) = 1 - (2 \lg e) \varepsilon^2(n) - \left(\frac{4}{3} \lg e\right) \varepsilon^4(n) - \dots,$$

где $\lambda = \frac{1}{2} + \varepsilon(n)$, где $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

С другой стороны, ясно, что при $k_0 < \frac{n}{2}$, $\sum_{k=k_0}^n C_n^k = 2^n - \sum_{k=0}^{k_0-1} C_n^k =$

$$= 2^n - \sum_{k=n-(k_0-1)}^n C_n^k = 2^n - \sum_{k=n\lambda}^n C_n^k,$$

где $k_0 = \frac{n}{2} - n\varepsilon + 1$.

Отсюда следует, что надо найти максимальное значение $\varepsilon(n)$,

при котором $\sum_{k=n(\frac{1}{2}+\varepsilon(n))}^n C_n^k / 2^n \rightarrow 0$.

Из неравенства для $\sum C_n^k$ получим:

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=(\frac{1}{2}+\varepsilon)n}^n C_n^k \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^{-2n(\lg e)\varepsilon^2}}{\sqrt{n} \varepsilon}.$$

Для того, чтобы $\frac{1}{2^n} \sum_{k=(\frac{1}{2}+\varepsilon)n}^n C_n^k \rightarrow 0$, достаточно чтобы $\sqrt{n} \cdot \varepsilon \rightarrow \infty$, которое означает, что величина $\varepsilon(n)$ должна стремиться к нулю медленнее чем $1/\sqrt{n}$, т.е. $\varepsilon(n) = \varphi(n)/\sqrt{n}$, где $\varphi(n) \rightarrow \infty$, откуда получим $k_0 \sim \frac{n}{2} - n \frac{\varphi(n)}{\sqrt{n}} = \frac{n}{2} - \sqrt{n} \varphi(n)$

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема. Почти все булевы функции имеют активность $L(\omega_1^f)$ не меньше чем $\frac{n}{2} - \sqrt{n} \varphi(n)$, где $\varphi(n) \rightarrow \infty$ сколь угодно медленно.

Естественно возникает вопрос: а какая активность $L(\omega_1^f)$ функции, которая имеет минимальную активность $L_{P_n}(\omega_1)$,

т.е. активность самой "плохой" функции.

На этот счет имеет место следующее утверждение.

Теорема. $L_{P_n^c}(\omega_1^f) \leq \lceil \lg n \rceil + 1$, где P_n^c булевы функции n переменных, для которых $\prod_{i=1}^n \omega_{x_i}^f \neq 0$.

Для доказательства теоремы достаточно построить пример, для которого $L(\omega_1^f) = \lceil \lg n \rceil + 1$. Построим пример для $n = 2^k + k + 1$. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 x_2 \dots x_{k+1} \vee x_1 x_2 \dots \bar{x}_k x_{k+2} \vee x_1 x_2 \dots \bar{x}_{k-1} x_k x_{k+3} \vee \dots \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_k x_{k+2}^k) x_{2^k+k+1}.$$

Легко заметить, что вектор $\tilde{\alpha} = (\overbrace{11\dots 1}^{k+1} 00\dots 01)$ является одним из векторов с максимальной активностью $\omega_1^f(\tilde{\alpha}) = k+2$. Причем, активными координатами являются $(1, 2, \dots, k+1, n)$.

Видимо, имеет место следующее утверждение.

Гипотеза. $L_{P_n^c}(\omega_1^f) = \lceil \lg n \rceil + 1$.

6. МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ АКТИВНОСТЬ

Для монотонных функций имеет место следующая теорема.

Теорема. Для монотонных /вообще говоря, для обобщенных монотонных/ функций имеет место следующее равенство:

$$L_{M^c}(\omega_1) = \lceil \sqrt{n} \rceil,$$

где M^c имеет тот же смысл, что и P_n^c . Этот факт, видимо, независимо от теории активностей был известен /см., например, [6], глава 1, задача 5.35/.

Доказательство этой теоремы основывается на том, что минимальная дизъюнктивная нормальная форма монотонной функции не содержит отрицаний. Кроме того, в минимальной форме содержатся все n -переменные и следовательно или 1/ в минимальной форме имеется конъюнктивный член сложности не меньше $\lceil \sqrt{n} \rceil$, или 2/ сложность всех конъюнктивных членов меньше $\lceil \sqrt{n} \rceil$, тогда количество конъюнктивных членов будет не меньше $\lceil \sqrt{n} \rceil$. В первом случае очевидно, что если выбрать $\tilde{\alpha}$ так, что его координаты равны единице, если их номера совпадают с номерами переменных, входящих в конъюнктивный член со сложностью не меньше

$\lceil \sqrt{n} \rceil$, а в остальных местах равны нулю. Такой вектор $\tilde{\alpha}$ будет иметь активность $\lceil \sqrt{n} \rceil$. Во втором случае оказывается можно выбрать не менее чем $\lceil \sqrt{n} \rceil$ переменных, каждая из которых входит в одну и только одну конъюнкцию. Тогда $\tilde{\alpha}$ выбирается так, что его координаты равны нулю, если их номера совпадают с номерами этих переменных, и единице в противном случае. При таком выборе вектор $\tilde{\alpha}$ будет иметь активность не менее чем $\lceil \sqrt{n} \rceil$.

Как было сказано, асимптотически $\approx 0,4$ часть всех функций имеют активность $L(\omega_1^f) = n$, т.е. для одиночных ошибок обладают динамическим тестом единичной длины. Однако это свойство не распространяется на класс монотонных функций. Легко заметить, что количество монотонных функций, обладающих этим свойством, всего 2. Это функции $x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$ и $x_1 x_2 \dots x_n$.

Для остальных монотонных функций активность определяется активностью вектора минимального верхнего нуля или максимальной нижней единицей.

Для установления этого факта убедимся в правильности следующих лемм.

Лемма 1. Для монотонной функции $f(\tilde{x})$ активные координаты вектора $\tilde{\alpha}$ равны $f(\tilde{\alpha})$.

Действительно, если i координата $\tilde{\alpha}$ активна, то

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \oplus f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \bar{\alpha}_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = 1,$$

то есть одно из слагаемых равно нулю, а другое - единице и из-за монотонности функции $f(\dots \alpha_i \dots) = 0$, если $\alpha_i = 0$, и $f(\dots \alpha_i \dots) = 1$, если $\alpha_i = 1$. Таким образом, если монотонная функция в данной точке $\tilde{\alpha}$ равна единице, то $\tilde{\alpha}$ активными могут быть только единичные координаты, а если функция в точке $\tilde{\alpha}$ равна нулю, то у $\tilde{\alpha}$ активными могут быть только нулевые координаты.

Лемма 2. Для монотонной функции для каждого вектора имеется экстремальная точка /нижняя единица или верхний нуль/, у которой активность не меньше чем активность рассматриваемого вектора.

Рассмотрим вектор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Пусть $f(\tilde{\alpha}) = 1$, тогда активными могут быть только единичные координаты этого вектора. Пусть вектор $\tilde{\beta}$ нижняя единица, в подкубе единиц которого находится $\tilde{\alpha}$. Ясно, что у $\tilde{\beta}$ все единицы являются активными, так как во всех точках ниже $\tilde{\beta}$ $f = 0$. Так как $\tilde{\beta}$ ниже $\tilde{\alpha}$ и $f(\tilde{\beta}) = 1$, то у $\tilde{\alpha}$ активными могут быть только те координаты, которые у $\tilde{\beta}$ равны единице. Отсюда следует, $\omega(\tilde{\beta}) \geq \omega(\tilde{\alpha})$, что и является утверждением леммы.

Из этих двух лемм следует, что для нахождения вектора с максимальными активностями достаточно искать их среди нижних единиц или верхних нулей. Отсюда следует следующее утверждение, выказанное вначале.

Лемма 3. Активность монотонной функции совпадает с большей из активностей максимальной нижней единицы или минимального верхнего нуля.

Из этих лемм непосредственно следует, что для монотонных функций имеет место следующий интересный факт.

Теорема. Для того, чтобы две экстремальные точки $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ составляли полный динамический тест монотонной функции f , необходимо и достаточно, чтобы для каждого i $\alpha_i^{f(\tilde{\alpha})} \vee \beta_i^{f(\tilde{\beta})} = 1$.

Это означает, что когда $f(\tilde{\alpha})$ и $f(\tilde{\beta})$ равны единице, то по лемме 1 единицы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ должны заполнять все n координаты, а если $f(\tilde{\alpha})$ и $f(\tilde{\beta})$ равны нулю, то, наоборот, нули должны заполнять все координаты, в третьем случае, когда $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$, нули одного и единицы другого вместе должны заполнять все координаты.

Из этой теоремы легко усмотреть, что количество монотонных функций, имеющих полный тест длины два, достаточно большое. Например, если взять монотонные функции /при n четном/, которые в $B^{n/2}$ принимают произвольные значения кроме не менее, чем в двух противоположных точках, где функция принимает одинаковые значения, в остальных верхних слоях принимает единицу, а в нижних - нуль, то эти функции обладают полным динамическим тестом длины 2. Их количество не меньше $2^{C_n^{n/2}} - 2^{C_n^{n/2}/2} \sim 2^{C_n^{n/2}}$, что совпадает с известной нижней границей оценки количества всех монотонных функций.

Предполагается, что имеет место следующее утверждение.

Гипотеза. Почти все монотонные функции имеют полный динамический тест длины два.

Конечно, легко понять, что все факты, изложенные для монотонных функций, имеют место и для обобщенных монотонных функций.

7. НЕКОТОРЫЕ РАСШИРЕНИЕ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ

Задачи этого параграфа исходили из практики работы венгерских ученых и были поставлены научным сотрудником Исследовательского института вычислительной техники и автоматизации Венгерской Академии наук Пастор Эндрене Каталин.

Будем рассматривать трехзначные векторы и функции. В качестве символов будем брать $(0, 1, \sim)$ координаты переменные и другие величины в трехзначном случае будем обозначать кружочком, как например: $\overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{x}$.

Пусть задан вектор $\overset{\circ}{\alpha} = \{\overset{\circ}{\alpha}_1, \overset{\circ}{\alpha}_2, \dots, \overset{\circ}{\alpha}_n\}$ Предположим, что некоторые из этих координат, скажем, $\overset{\circ}{\alpha}_{i_1}, \overset{\circ}{\alpha}_{i_2}, \dots, \overset{\circ}{\alpha}_{i_k}$ равны нулю или единице, их будем обозначать через $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$, а все остальные координаты равны \sim .

Определение. Подкубом вектора $\overset{\circ}{\alpha}$ назовем множество

$$B(\overset{\circ}{\alpha}) = B_{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}}^{n, i_1, i_2, \dots, i_k} = \{\tilde{x} \in V^n \mid x_{i_j} = \alpha_{i_j}, j=1, 2, \dots, k\}.$$

Определение. Значение функции f на множестве A определим следующим образом:

$$f(A) = \begin{cases} f(\tilde{\alpha}) & , \text{ где } \tilde{\alpha} \in A, \text{ если } \Omega_A^f = 0 \\ \sim & \text{если } \Omega_A^f \neq 0 \end{cases}$$

Определение. Расширением двухзначной булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ назовем следующую трехзначную функцию:

$$\overset{\circ}{f}(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n) = f(B(\overset{\circ}{x}))$$

Теперь рассмотрим расширение этих функций

$$\overset{\circ}{f}(\overset{\circ}{y}_1, \overset{\circ}{y}_2, \dots, \overset{\circ}{y}_k, \varphi_1(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n), \varphi_2(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n), \dots, \varphi_k(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n))$$

и составим их суперпозиции:

$$\psi(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n) = \overset{\circ}{f}(\overset{\circ}{\varphi}_1(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_n), \overset{\circ}{\varphi}_2(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_n), \dots, \overset{\circ}{\varphi}_k(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n))$$

Основная задача этого параграфа заключается в выяснении вопроса о том, когда $\psi(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n) \in \overset{\circ}{P}_n$ и, что более важно, когда

$$\overset{\circ}{\Phi}(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n) = \psi(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$$

Впредь будем использовать естественные обозначения:

$\underbrace{[\overset{\circ}{f}_1, \overset{\circ}{f}_2, \dots, \overset{\circ}{f}_k]}_{\overset{\circ}{f}}$ - замыкание функций $\overset{\circ}{f}_1, \overset{\circ}{f}_2, \dots, \overset{\circ}{f}_k$.
 - это обозначение будет означать, что вначале производится замыкание, а потом их расширение.

Сначала приведем некоторые почти очевидные факты.

Утверждение 1. $[\overset{\circ}{P}_n] \subseteq \overset{\circ}{P}_n(3)$

Что $\overset{\circ}{P}_n \subseteq \overset{\circ}{P}_n(3)$ очевидно, т.к. любая функция из $\overset{\circ}{P}_n$ является функцией из $\overset{\circ}{P}_n(3)$. Но т.к. все функции из $\overset{\circ}{P}_n$ в точке $(\sim, \sim, \dots, \sim)$ принимают значение \sim и следовательно любая их суперпозиция также обладает этим свойством, ясно, что в $\overset{\circ}{P}_n(3)$ имеются функции, не обладающие этим свойством.

Утверждение 2. $\overset{\circ}{P}_n \neq [\overset{\circ}{P}_n]$

Ясно, что $\overset{\circ}{P}_n \subseteq [\overset{\circ}{P}_n]$. Покажем, что в $[\overset{\circ}{P}_n]$ существуют функции, которые не являются расширенными какой-либо булевой функцией.

Для этого возьмем $f = (x \oplus y)$, $\varphi_1 = x$, $\varphi_2 = (x \rightarrow y)$. Расширение этих функций приведены в таблице в первых двух столбцах.

		1	2	3	4
$\overset{\circ}{x}$	$\overset{\circ}{y}$	$x \overset{\circ}{\oplus} y$	$x \overset{\circ}{\rightarrow} y$	$\overset{\circ}{\phi}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$	$\overset{\circ}{\Phi}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	~	~	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	~	~	~	~	~
~	0	~	~	~	1
~	1	~	1	~	~
~	~	~	~	~	~

Рассмотрим функцию $\overset{\circ}{\phi}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}) = f(\overset{\circ}{\phi}_1(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y}), \overset{\circ}{\phi}_2(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})) = \overset{\circ}{x} \overset{\circ}{\oplus} (\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{\rightarrow} \overset{\circ}{y})$ значения которой приведены в столбце 3. Но функция $\phi(x, y) = x \oplus (x \rightarrow y) = \overline{x}y = x \downarrow y$, расширение которой $\overset{\circ}{\phi}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ приведено в столбце 4, не совпадает с $\overset{\circ}{\phi}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$. Из-за однозначности определения расширения, $\overset{\circ}{\phi}(\overset{\circ}{x}, \overset{\circ}{y})$ не может совпадать с расширением какой-либо другой булевой функции.

Утверждение 3. Если $[F] = F$, то следующие утверждения эквивалентные:

$$([F] \subset P_n^{\circ}) \text{ и } \overset{\circ}{\phi}(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n) = \overset{\circ}{\phi}(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$$

где $f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \in F$.

Это утверждение показывает, что поставленные в начале этого параграфа две задачи эквивалентны.

Для того, чтобы выяснить вопрос: для каких классов расширение суперпозиции совпадает с суперпозицией их расширения, рассмотрим более глубоко их различие.

Рассмотрим функцию

$$f(y_1, y_2, \dots, y_k), \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Пусть $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\varphi_1(\tilde{x}), \varphi_2(\tilde{x}), \dots, \varphi_k(\tilde{x}))$, ее расширение будет $\overset{\circ}{\Phi}(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$. Значение этого расширения в конкретной точке $\overset{\circ}{\alpha}$ вычисляется следующим образом.

Рассматривается подкуб вектора $\overset{\circ}{\alpha} - V(\overset{\circ}{\alpha})$. Вычисляются на всех точках этого подкуба вектора $A = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$, а затем вычисляется значение $\overset{\circ}{\Phi}(\overset{\circ}{\alpha}) = f(A)$.

Вычисление же значения функции $\psi(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n) = \overset{\circ}{f}(\overset{\circ}{\varphi}_1(\overset{\circ}{x}), \dots, \overset{\circ}{\varphi}_k(\overset{\circ}{x}))$ в точке $\overset{\circ}{\alpha}$ производится следующим образом.

Вычисляются значения функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ на множестве $V(\overset{\circ}{\alpha})$, $\overset{\circ}{\Phi} = (\varphi_1(V(\overset{\circ}{\alpha})), \varphi_2(V(\overset{\circ}{\alpha})), \dots, \varphi_k(V(\overset{\circ}{\alpha})))$, далее берется подкуб вектора $V(\overset{\circ}{\Phi})$ и вычисляется значение $\psi(\overset{\circ}{\alpha}) = f(V(\overset{\circ}{\Phi}))$.

Из этих формул видно, что эти две функции отличаются друг от друга тем, что для одной вычисляется f на множестве A , а для другой - на множестве $V(\overset{\circ}{\Phi})$.

Фактически мы доказали следующую

Теорему. Для того, чтобы расширение суперпозиций заданных функций $f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ совпадало с суперпозицией расширения этих функций, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\overset{\circ}{\alpha}$ $f(A) = f(V(\overset{\circ}{\Phi}))$

В связи с этим более подробно рассмотрим эти два множества.

Множество A состоит из векторов значений функций $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$, вычисленных на множестве $V(\tilde{\alpha})$, которое является некоторым подкубом V^n . Расположим точки подкуба $V(\tilde{\alpha})$ последовательно по слоям, а в слоях лексикографически. Пусть это расположение есть $\tilde{\alpha}^1, \tilde{\alpha}^2, \dots, \tilde{\alpha}^{2^S}$, тогда множество A будет иметь следующую структуру:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}^1) = (\varphi_1(\tilde{\alpha}^1), \varphi_2(\tilde{\alpha}^1), \dots, \varphi_k(\tilde{\alpha}^1)) \\ \tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}^2) = (\varphi_1(\tilde{\alpha}^2), \varphi_2(\tilde{\alpha}^2), \dots, \varphi_k(\tilde{\alpha}^2)) \\ \tilde{\varphi}(\tilde{\alpha}^{2^S}) = (\varphi_1(\tilde{\alpha}^{2^S}), \varphi_2(\tilde{\alpha}^{2^S}), \dots, \varphi_k(\tilde{\alpha}^{2^S})) \end{array} \right\}$$

Каждая строка которой является точкой k -мерного единичного куба, на которых вычисляется значение функции $f(y)$.

Множество $V(\tilde{\varphi})$ является некоторым дополнением этого множества A . Рассматриваются только непосредственные столбцы множества A , если строки этих столбцов не составляют полный единичный куб, размер которого совпадает с количеством непостоянных столбцов A , то строки A дополняются недостающими строками для получения указанного единичного куба. Таким образом понятно, что у обоих этих множеств, если их рассмотреть в виде вышеуказанных матриц, совпадают номера постоянных и непостоянных столбцов. Причем, соответствующие постоянные столбцы принимают одинаковое значение.

Теперь перейдем к вопросу выделения замкнутых классов в множестве расширенных функций \tilde{P} .

Легко доказать следующее утверждение.

Теорема. Если F класс обобщенных монотонных функций с фиксированным $(\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, то $[F] = [\tilde{F}]$.

Из утверждения 3 следует, что утверждение этой теоремы эквивалентно утверждению о том, что для классов функций F расширение суперпозиции этих функций совпадает с суперпозицией расширений тех же функций. Для доказательства рассмотрим произвольные функции $f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ из F . /Для простоты рассуждения предположим, что $F=M$./ Поскольку функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ монотонные, то их значения в таблице A по каждому столбцу будут расположены так, что $\varphi_i(\alpha^1) \leq \varphi_i(\alpha^2) \leq \dots \leq \varphi_i(\alpha^{2^S})$, т.е. если i -тый столбец не принимает постоянного значения, то $\varphi_i(\alpha^1)=0$, а $\varphi_i(\alpha^{2^S})=1$. Отсюда следует, что любой вектор $\tilde{\varphi} \in B(\tilde{\varphi})$ удовлетворяет условию $\tilde{\varphi}(\alpha^1) \leq \tilde{\varphi} \leq \varphi(\alpha^{2^S})$. Но тогда, если для каких-то $\tilde{\varphi}^1$ и $\tilde{\varphi}^2 \in B(\tilde{\varphi})$ имеет место $f(\tilde{\varphi}^1) \neq f(\tilde{\varphi}^2)$, то непосредственно следует, что $f(\tilde{\varphi}(\alpha^1)) \neq f(\tilde{\varphi}(\alpha^{2^S}))$, а если для любого $\tilde{\varphi} \in B(\tilde{\varphi})$ постоянна, то функция f постоянна и на всех векторах множества A . Таким образом, мы доказали, что для монотонных функций функция f на множестве A и $B(\tilde{\varphi})$ принимает одинаковые значения, что и требовалось доказать.

Summary

SOME DIFFERENTIAL CHARACTERISTICS OF BOOLEAN FUNCTIONS

The work deals with some differential characteristics of Boolean functions. We have introduced a notion of activity of arguments for Boolean functions. With the help of this notion we have obtained new results in creating dynamical tests for scheme control and for the control of computation correctness of Boolean functions. We have obtained complexity estimates for dynamical tests for different classes of Boolean functions. We have considered an expansion of Boolean functions which arise because of unreliable work of electrical circuits in real conditions. We have also gone into the question of stability of these functions with respect to the operation of superposition.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А.В. Петросян: Некоторые вопросы помехоустойчивости функций алгебры логики. ДАН Арм. ССР, 1963, XXXVI.
2. А.В. Петросян, Ш.Е. Бозоян: Об одном методе повышения надежности логических схем. ДАН Арм. ССР, 1976, т. XII, № 1.
3. Ш.Е. Бозоян, Б.Е. Торосян: Исследование функций алгебры логики с точки зрения активности совокупности переменных. Известия АН Арм. ССР, "Математика", том 14, № 2, 1979.
4. Б.Е. Торосян: Комбинаторные свойства некоторых классов пороговых функций. ДАН Арм. ССР, том 68, № 1, 1979.
5. И.А. Акопян, Л.А. Аслаян: Доказательство некоторых оценок сокращенных дизъюнктивных нормальных форм булевых функций. Ученые записи, ЕрГУ, 1, 1980.
6. Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко: Сборник задач по дискретной математике, М., 1977.
7. А.В. Петросян: Основы дискретной математики. г. Ереван, 1978 г., Рукопись.
8. A. Thayse: Boolean Calculus of Differences, Springer-Verlag, 1981.

МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В КЛАССЕ ШАРОВЫХ ПОКРЫТИЙ

Караханян В.М.

Вопросам минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм /д.н.ф./ посвящено много работ [1 - 6]. Выбор д.н.ф. в качестве аппарата представления булевых функций объясняется тем /см., например, [7]/, что они удобны для простых схемных реализаций функций. При этом получаются двухслойные схемы, что намного упрощает исследование вопросов быстродействия и надежности схем.

В настоящее время теоретически доказано, что универсальные алгоритмы минимизации булевых функций в классе д.н.ф. практически сложны, и что полученные д.н.ф. для почти всех функций не намного проще совершенных. Однако, известны простые алгоритмы, строящие для почти всех функций достаточно простые д.н.ф.

Задача минимизации геометрически заключается в том, что для произвольного заданного подмножества N n -мерного единичного куба E^n ищется минимальное покрытие этого подмножества подкубами E^n . Сложность этой задачи дает нам основу для поиска минимальных покрытий в других классах покрытий. На самом деле мы будем рассматривать вопросы построения минимальных шаровых покрытий подмножества E^n . Решение этих вопросов также позволит построить простые схемы булевых функций. Единственное отличие от предыдущего случая заключается в том, что вместо используемых элементарных конъюнкций в этих схемах мы применяем ячейки, подсчитывающие норму входного слова.

В данной работе приводятся некоторые результаты рассматриваемой задачи. Далее, будут исследованы задачи построения минимальных покрытий как интервалами и шарами одновременно, так и специальными системами "урезанных" шаров.

I. Формулировка некоторых утверждений общего характера

Рассмотрим произвольное подмножество N n - мерного единичного куба E^n . Обозначим через $S^k(\alpha)$ шар радиуса k с центром в точке α в метрике Хемминга. Скажем, что $\{S^{k_1}(\alpha_1), S^{k_2}(\alpha_2), \dots, S^{k_r}(\alpha_r)\}$ является шаровым покрытием /ш.п./ множества N , если $N = \bigcup_{i=1}^r S^{k_i}(\alpha_i)$.

Число r назовем длиной шарового покрытия. Шаровое покрытие подмножества $N \subseteq E^n$ с наименьшей длиной назовем кратчайшим ш.п. и обозначим через $m_k(N)$.

Ясно, что кратчайшее ш.п. можно построить с помощью простого алгоритма перебора, однако, при росте n сложность этого алгоритма резко возрастает.

Замечание 1. Число различных шаровых покрытий подмножества n - мерного единичного куба E^n равно $2^{n \cdot 2^n + 1}$.

$S^k(\alpha)$ назовем максимальным шаром для подмножества $N \subseteq E^n$, если $S^k(\alpha) \subseteq N$ и не существует шара $S^{k_1}(\beta)$ такого, что $S^k(\alpha) \subset S^{k_1}(\beta) \subseteq N$. Совокупность всех максимальных шаров подмножества N определяет покрытие N , которое будем называть сокращенным ш.п. - $m_c(N)$.

Покрытие подмножества N максимальными шарами назовем неприводимым ш.п., если после удаления из него любого шара оно перестает быть покрытием, и обозначим через $m_{np}(N)$.

Ясно, что всякое кратчайшее ш.п. является неприводимым, но неприводимое ш.п. и сокращенное ш.п., вообще говоря, не являются кратчайшими.

Теорема 1. Для всякого подмножества $N \subseteq E^n$ существует кратчайшее ш.п., которое получается из сокращенного ш.п. N путем удаления некоторых максимальных шаров.

В дальнейшем мы будем рассматривать только те кратчайшие ш.п., которые удовлетворяют утверждению теоремы 1.

Таким образом, для построения кратчайших ш.п. нужно построить все неприводимые ш.п. и выбрать из них кратчайшие.

Процесс перехода от сокращения ш.п. к неприводимому можно разбить на элементарные шаги, каждый из которых представляет собой удаление из ш.п. \mathcal{M} , полученного на предыдущем шаге, одного шара $S^k(\alpha)$. Удаляемый шар таков, что

$$S^k(\alpha) \subseteq \bigcup_{j=1}^m S^k_j(\alpha_j)$$

где $S^k_j(\alpha_j)$ — некоторые шары из ш.п. \mathcal{M} , отличные от $S^k(\alpha)$.

Поэтому неприводимые ш.п. подмножества $N \subseteq E^n$ можно построить алгоритмами, аналогичными описанными в [7, стр. 80].

Объединение всех кратчайших /соответственно неприводимых/ ш.п. подмножества N назовем ш.п. типа UK /соотв. ИМП/ и обозначим через $\mathcal{M}_{UK}(N)$ /соотв. $\mathcal{M}_{ИМП}(N)$ /.

Пересечение всех кратчайших /неприводимых/ ш.п. подмножества N назовем ш.п. типа ПК /ИМП/ и обозначим через $\mathcal{M}_{ПК}(N)$ ($\mathcal{M}_{ИМП}(N)$).

Ясно, что

$$\mathcal{M}_{ИМП}(N) \subseteq \mathcal{M}_{ПК}(N) \subseteq \mathcal{M}_{UK}(N) \subseteq \mathcal{M}_{ИМП}(N).$$

Ядром ш.п. \mathcal{M} назовем совокупность всех таких шаров $S^k_j(\alpha_j) \in \mathcal{M}$, для которых

$$S^k_j(\alpha_j) \not\subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r S^k_i(\alpha_i)$$

Теорема 2. Шар $S^k(\alpha)$ из ш.п. \mathcal{M} входит в ш.п. $\mathcal{M}_{ИМП}$ тогда и только тогда, когда $S^k(\alpha)$ входит в ядро ш.п. \mathcal{M} .

С л е д с т в и е 1. Пусть ядро ш.п. \mathcal{M} состоит из шаров $S^{k_1}(\alpha_1), S^{k_2}(\alpha_2), \dots, S^{k_s}(\alpha_s)$. Если $S^k(\alpha) \subseteq \bigcup_{i=1}^s S^{k_i}(\alpha_i)$, то шар $S^k(\alpha)$ не входит в ш.п. $\mathcal{M}_{\text{унп}}$.

В силу теоремы 2 для произвольного ш.п. \mathcal{M} вопрос вхождения или не вхождения шара $S^k(\alpha)$ в $\mathcal{M}_{\text{унп}}$ однозначно определяется окрестностью первого порядка $D_1(S^k(\alpha), \mathcal{M}) = \{S^{k_i}(\alpha_i) / S^{k_i}(\alpha_i) \cap S^k(\alpha) \neq \emptyset, S^{k_i}(\alpha_i) \in \mathcal{M}\}$ шара $S^k(\alpha) \in \mathcal{M}$ в шаровом покрытии \mathcal{M} .

Пусть \mathcal{M}_Q ш.п. /ш.п. Квайна/ полученное из \mathcal{M}_c на основе следствия 1. Тогда $\mathcal{M}_{\text{унп}} \subseteq \mathcal{M}_Q$, причем не исключено существование шара $S^k(\alpha) \in \mathcal{M}_Q \setminus \mathcal{M}_{\text{унп}}$.

Для шаровых покрытий имеет место также необходимый и достаточный критерий, полученный Ю.И. Журавлевым, о невхождении шара $S^k(\alpha)$ в ш.п. $\mathcal{M}_{\text{унп}}$.

Действительно, пусть $\mathcal{M}(\alpha, \mathcal{M})$ пучок всех шаров $S^{k_i}(\alpha_i)$ ш.п. \mathcal{M} подмножества N , которые проходят через точку $\alpha \in N$.

Рассмотрим произвольный шар $S^k(\alpha) \in \mathcal{M}$. Точку $\beta \in S^k(\alpha)$ назовем регулярной относительно $(S^k(\alpha), \mathcal{M})$, если существует точка β' такая, что

1. $\beta' \in \mathcal{M} \setminus S^k(\alpha)$
2. $\mathcal{M}(\beta', \mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}(\beta, \mathcal{M})$.

Множество $\mathcal{M} \subseteq S^k(\alpha)$ назовем регулярным относительно $(S^k(\alpha), \mathcal{M})$, если все его точки регулярны относительно $(S^k(\alpha), \mathcal{M})$.

Теорема 3. Шар $S^k(\alpha)$ из ш.п. \mathcal{M} не входит в ш.п. $\mathcal{M}_{\text{унп}}$ тогда и только тогда, когда он является множеством, регулярным относительно $(S^k(\alpha), \mathcal{M})$.

Свойство шара входит или не выходит в ш.п. $\mathcal{M}_{\text{унп}}$ однозначно определяется окрестность второго порядка.

2. О максимальных значениях длин шаровых покрытий

Максимально возможная длина непроводимого шарового покрытия подмножества $N \subseteq E^n$ обозначим через $\ell_{\text{нп}}(N)$. Пусть $\ell_c(N)$ и $\ell_k(N)$ соответственно длины сокращенных и кратчайших шаровых покрытий подмножества N . Обозначим

$$\ell_{\text{нп}}(n) = \max_{N \subseteq E^n} \ell_{\text{нп}}(N), \quad \ell_c(n) = \max_{N \subseteq E^n} \ell_c(N)$$

$$\ell_k(n) = \max_{N \subseteq E^n} \ell_k(N).$$

Пусть $S^k(\alpha_0), S^k(\alpha_1), \dots, S^k(\alpha_r)$ - все шары радиуса k содержащиеся в шаре $S^{k+1}(\alpha_0)$. Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ - вершины, соседние с α_0 , и $r = n - k$, если $k \leq n-2$ и $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ - все вершины E^n , $r = 2^{n-1} - 1$, если $k = n-1$. В дальнейшем множество $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ будем обозначать через $V(\alpha_0)$.

Обозначим через E_i^n для $i=1, 2, \dots, n$ i -ый слой куба E^n . Если $A \subseteq E_i^n$, то $\ell_i(A)$ состоит из всех тех точек i -го слоя E^n , которые сравнимы хотя бы с одной точкой множества A .

Лемма 1. $S^{k+1}(\alpha_0) = \bigcup_{\alpha \in V_1} S^k(\alpha)$ тогда и только тогда, когда

$$V_1 = V(\alpha_0) \quad \text{и} \quad |V_1| \geq n - k + 1.$$

Доказательство. Для $k = n-1$ утверждение леммы очевидно. Пусть $k \leq n-2$. В этом случае $|V(\alpha_0)| = n+1$. Не нарушая общности, можно предположить, что $\alpha_0 = (0, 0, \dots, 0)$. Для доказательства необходимости условий леммы заметим, что необходимость условия $V_1 \subseteq V(\alpha_0)$ очевидна и в предположении $V_1 \subseteq V(\alpha_0)$ и $|V_1| \leq n-k$ покажем, что $S^{k+1}(\alpha_0) \neq \bigcup_{\alpha \in V_1} S^k(\alpha)$.

Действительно, если:

а/ $\alpha_0 \in V_1$, то $|E_1^n \setminus V_1| \geq k$. Легко убедиться, что для произвольного подмножества $V_2 \subseteq (E_1^n \setminus V_1)$ мощность k существует такая точка $\beta \in E_k^n$, что $\ell_1(\beta) = V_2$. Получаем, что точка β не покрывается множеством $\bigcup_{\alpha \in V_1} S^k(\alpha)$, и тем самым $S^{k+1}(\alpha_0) \neq \bigcup_{\alpha \in V_1} S^k(\alpha)$.

б/ $\alpha_0 \in V_1$, то $|E_1^n \setminus V_1| \geq k+1$. Тогда для произвольного подмножества $B_2 \subseteq (E_1^n \setminus V_1)$, $|B_2| = k+1$, существует такая точка $\beta \in E_{k+1}^n$, что $H^1(\beta) = B_2$. Следовательно, точка β не покрывается множеством $\bigcup_{\alpha \in V_1} S^k(\alpha)$, и $S^{k+1}(\alpha_0) \neq \bigcup_{\alpha \in V_1} S^k(\alpha)$.

Перейдем к доказательству достаточности. Для этого рассмотрим произвольное ш.п. $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha \in V_1} S^k(\alpha)$, где $V_1 \subseteq V(\alpha_0)$ и $|V_1| \geq n-k+1$.

а/ Если $\alpha_0 \in V_1$, то $\mathcal{M} \supseteq S^k(\alpha_0)$ и $|E_1^n \setminus V_1| \leq k$. Так как $H^1(\beta) = k+1$ для каждой точки $\beta \in E_{k+1}^n$, то $H^1(\beta) \cap V_1 \neq \emptyset$. Значит произвольная точка $\beta \in E_{k+1}^n$ покрывается шаром $S^k(\alpha)$, где $\alpha \in H^1(\beta) \cap V_1$, откуда следует, что $\mathcal{M} \subseteq E_{k+1}^n \cup S^k(\alpha_0)$, и что $\bigcup_{\alpha \in V_1} S^k(\alpha) = S^{k+1}(\alpha_0)$.

б/ Если $\alpha_0 \notin V_1$, то $\mathcal{M} \supseteq S^{k-1}(\alpha_0)$ и $|E_1^n \setminus V_1| \leq k-1$. Тогда $H^1(\beta) \cap V_1 \neq \emptyset$ для каждой точки $\beta \in E_k^n \cup E_{k+1}^n$, так как $k \leq |H^1(\beta)| \leq k+1$ при $\beta \in E_k^n \cup E_{k+1}^n$. Значит, произвольная точка $\beta \in E_k^n \cup E_{k+1}^n$ покрывается шаром $S^k(\alpha)$, где $\alpha \in H^1(\beta) \cap V_1$, откуда следует, что $\mathcal{M} \subseteq (E_k^n \cup E_{k+1}^n \cup S^{k-1}(\alpha_0))$, и что $\bigcup_{\alpha \in V_1} S^k(\alpha) = S^{k+1}(\alpha_0)$.

Лемма доказана.

Точку $\alpha \in N$, $N \subseteq E^n$, назовем внутренней точкой подмножества N , если $S^1(\alpha) \subseteq N$. В противном случае точку $\alpha \in N$ назовем граничной точкой подмножества N . Через $\Gamma(N)$ обозначим множество всех граничных точек подмножества N .

Пусть

$$\gamma(n) = \max_{N \subseteq E^n} |\Gamma(N)|.$$

З а м е ч а н и е 2. Если подмножество $N_0 \subseteq E^n$ такое, что $|\Gamma(N_0)| = \gamma(n)$, то оно не содержит шаров радиуса $k \geq 2$.

Далее, если указанное подмножество $N_0 \subseteq E^n$ содержит внутренние точки, то удаляя все эти точки приходим к подмножеству N'_0 для

которого также $|\Gamma(N'_0)| = \gamma(n)$. Поэтому в дальнейшем под N_0 будем понимать такое подмножество, которое состоит лишь из граничных точек и удовлетворяет условию $|\Gamma(N_0)| = \gamma(n)$.

Теорема 4. $\ell_c(n) = \ell_{\text{нп}}(n) = \ell_k(n) = \gamma(n)$.

Доказательство. Если возьмем подмножество N_0 , то $\ell_c(N_0) = \ell_{\text{нп}}(N_0) = \ell_k(N_0) = \gamma(n)$. Значит

$$\ell_k(n) \geq \ell_k(N_0) = \gamma(n) \quad /1/$$

Покажем, что $\ell_c(n) \leq \gamma(n)$. Для этого рассмотрим множество шаров куба E^n , как частичное упорядоченное множество по отношению к операции вложения шаров друг в друга, и представим в виде графа. Вершинами графа являются шары куба E^n , и ребрами соединены те вершины, которые соответствуют вложенным один в другой шарам, отличающимся по радиусу лишь на 1.

Пусть сокращенное ш.п. $\mathcal{M}_c(N)$ произвольного подмножества N составлено из $\ell_c(N)$ шаров: $\mathcal{M}_c(N) = \{S_1, S_2, \dots, S_{\ell_c(N)}\}$. Система $\mathcal{M}_c(N)$ состоит лишь из несравнимых максимальных шаров. Причем согласно лемме 1, для произвольного $i, 0 \leq i < n$, в произвольном шаре $S^{i+1}(\beta) \notin \mathcal{M}_c(N)$ могут содержаться самое большее $n-i$ шаров радиуса i принадлежащих $\mathcal{M}_c(N)$ или поглощаемых шарами $\mathcal{M}_c(N')$ имеющих большой радиус. Через p_i обозначим число шаров радиуса i из $\mathcal{M}_c(N)$. Докажем, что если система $\mathcal{M}_c(N)$ имеет максимальную мощность, то $p_i = 0$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Для этого предположим обратное, то есть допустим, что существует такое $i_0 \geq 1$, что $p_{i_0} \neq 0$ и $p_i = 0$ при $i > i_0$. Рассмотрим множества

$$\mathcal{M}_1 = \{S^{i_0}(\alpha_1), S^{i_0}(\alpha_2), \dots, S^{i_0}(\alpha_{p_{i_0}})\} \subseteq \mathcal{M}_c(N)$$

$$\mathcal{M}_2 = \{S^{i_0-1}(\beta_1), S^{i_0-1}(\beta_2), \dots, S^{i_0-1}(\beta_{p_{i_0}})\} \subseteq \mathcal{M}_c(N).$$

Исходя из вершины α_1 , согласно лемме 1, можно выбрать такую точку $\alpha_0 \in B(\alpha_1)$, что $\alpha_0 \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p_{i_0}}\}$. Составим новую

систему $\mathcal{M}' = (\mathcal{M}_c(N) \cup \mathcal{M}_1) \cup \mathcal{M}'_1$, где $\mathcal{M}'_1 = \{S^{i_0-1}(\alpha_0), S^{i_0-1}(\alpha_1), \dots, S^{i_0-1}(\alpha_{p_{i_0}})\}$ и покажем, что она состоит из максимальных шаров некоторого подмножества $N' \subseteq E^n$. Для этого достаточно убедиться, что для произвольного $\beta \in E^n$ в шаре $S^{i_0}(\beta) \notin \mathcal{M}'$ содержится самое большее $n-i_0+1$ шаров подсистемы $\mathcal{M}'_1 \cup \mathcal{M}_2$ радиуса i_0-1 . Действительно $\beta \in E^n \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p_{i_0}}\}$, то $S^{i_0}(\beta)$ содержит не более $n-i_0+1$ шаров радиуса i_0-1 принадлежащих $\mathcal{M}_c(N)$ или поглащаемых шарами, принадлежащими $\mathcal{M}_c(N)$, так как $\mathcal{M}_c(N)$ является сокращенным шаровым покрытием. Тогда, согласно конструкции системы $\mathcal{M}'_1 \cup \mathcal{M}_2$ ясно, что $S^{i_0}(\beta)$ может содержать не более $n-i_0+1$ шаров радиуса i_0-1 , принадлежащих системе \mathcal{M}' .

Если же $\beta \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p_{i_0}}\}$, то воспользуемся тем, что в системе $\mathcal{M}_c(N)$ нет максимальных шаров радиуса i_0+1 , то есть, для каждой $\beta \in E^n$ $|B(\beta) \cap \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p_{i_0}}\}| \leq n-i_0$. В силу этого, для вершины $\beta \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p_{i_0}}\}$ и системы \mathcal{M}' имеем $|B(\beta) \cap \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p_{i_0}}\}| \leq n-i_0+1$, что согласно лемме 1 говорить об отсутствии максимальных шаров радиуса i_0 в системе \mathcal{M}' . Получили, что система \mathcal{M}' является сокращенным ш.п. для некоторого подмножества $N' \subseteq E^n$ при этом $\ell_c(N') = |\mathcal{M}'| > |\mathcal{M}_c(N)| = \ell_c(N)$. То есть мощность системы $\mathcal{M}_c(N)$ не могла бы быть максимальной. Полученное противоречие доказывает что $p_i = 0$ для $i=1, 2, \dots, n$. Таким образом, если $|\mathcal{M}_c(N)| = \ell_c(n)$, то $\mathcal{M}_c(N)$ состоит из одних максимальных шаров радиуса, то есть все точки подмножества N граничные и $N = \Gamma(N)$.

Получим, что

$$\ell_c(n) \leq \gamma(n)$$

/2/

Из неравенств /1/ и /2/ следует утверждение теоремы.

Лемма 2. $2^n(1 - \frac{1}{2^{\lceil \log_2(n+1) \rceil}}) \leq \gamma(n) \leq 2^n(1 - \frac{1}{n+1})$.

Доказательство. Пусть $\varphi(n)$ минимальное число шаров радиуса один, покрывающих n -мерный единичный куб E^n .

Если $n=2^m-1$, то известно $/[8]/$, что

$$\varphi(2^m-1)=2^{2^m-m-1}$$

Если $n \neq 2^m-1$, то число n однозначно можно представить в виде $n=(2^m-1)+a$, где $m=[\log_2(n+1)]$. Разбивая n -мерный единичный куб на (2^m-1) -мерные кубы, получим 2^a подкубов, следовательно

$$\varphi(n) \leq 2^a \cdot \varphi(2^m-1) = \frac{2^n}{2^{[\log_2(n+1)]}} \quad /3/$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\varphi(n) \geq \frac{2^n}{n+1} \quad /4/$$

Из неравенств $/3/$ и $/4/$ следует утверждать леммы.

3. Оценки величин, связанных с задачей построения кратчайших ш.п. для почти всех подмножеств куба E^n .

Пусть на множестве $\{A_i\}$, $1 \leq i \leq 2^{2^n}$, всех подмножеств куба E^n задан некоторый неотрицательный параметр $\chi(A)$. Рассмотрим его среднее значение

$$\bar{\chi}(n) = \frac{1}{2^{2^n}} \sum_{i=1}^{2^{2^n}} \chi(A_i)$$

Известна следующая простая

Лемма 3. Доля подмножества A куба E^n , для которых $\chi(A) \geq \frac{1}{\epsilon} \bar{\chi}(n)$, не превосходит ϵ .

Пусть $\{S_j\}$ ($1 \leq j \leq 2^n$) - совокупность всех шаров радиуса k куба E^n , и $A \subseteq E^n$ некоторое подмножество. Через $t^k(A)$ обозначим число допустимых шаров радиуса k подмножества A , т.е. шаров $S_j \subseteq A$, а через $\bar{t}^k(n)$ - его среднее значение.

Лемма 4. $\bar{t}^k(n) = 2^{n-a}$, где $a = \sum_{i=0}^k c_n^i$

Доказательство. Пусть

$$(A_i, S_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } S_j \subseteq A_i \\ 0, & \text{если } S_j \not\subseteq A_i \end{cases}$$

Тогда
$$\sum_{i=1}^{2^{2^n}} t^k(A_i) = \sum_{i=1}^{2^{2^n}} \sum_{j=1}^{2^n} e(A_i, S_j) = \sum_{j=1}^{2^n} \phi(S_j)$$

Таким образом нужно найти $\phi(S_j)$ — число подмножеств A_i , которые содержат данный шар S_j . Ясно, что

$$\phi(S_j) = 2^{2^n - a}, \quad \text{где } a = \sum_{i=0}^k C_n^i$$

Следовательно,

$$\bar{t}^k(n) = \frac{1}{2^{2^n}} \sum_{j=1}^{2^n} \phi(S_j) = \frac{1}{2^{2^n}} \cdot 2^n \cdot 2^{2^n - a} = 2^{n-a}$$

С л е д с т в и е 2. Почти все подмножества E^n не содержат допустимых шаров радиуса $k \geq 2$.

Действительно, согласно лемме 3, доля подмножеств A куба E^n , для которых $t^k(A) < \frac{1}{\epsilon} \bar{t}^k(n)$, не меньше $1 - \epsilon$. Подставляя значение $\bar{t}^k(n)$, находим, что правая часть этого неравенства при $k \geq 2$ и $\epsilon = \frac{1}{n}$ стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$.

С л е д с т в и е 3. Для почти всех подмножеств $A \subseteq E^n$ число допустимых шаров радиуса 1 меньше произвольной растущей функции $\eta(n)$.

Теорема 5. Для почти всех подмножеств $A \subseteq E^n$, $(1 - \delta') \cdot 2^{n-1} \leq \ell_k(A) \leq \ell_{\text{нп}}(A) \leq \ell_c(A) \leq (1 + \delta'') \cdot 2^{n-1}$, где $\delta' \rightarrow 0$, $\delta'' \rightarrow 0$.

Доказательство. Известно [5], что при любом $\epsilon > 0$ для почти всех подмножеств $A \subseteq E^n$

$$(1 - \epsilon) \cdot 2^{n-1} \leq |A| \leq (1 + \epsilon) \cdot 2^{n-1}$$

Согласно следствию 3, получим, что почти все подмножества содержат по крайней мере $(1 - \epsilon) \cdot 2^{n-1} - \eta(n)(n+1) = (1 - \delta') \cdot 2^{n-1}$ шаров с радиусом ноль, где $\delta' \rightarrow 0$, то есть для почти всех подмно-

жеств $A \subseteq E^n$

$$\ell_k(A) \geq (1 - \delta') \cdot 2^{n-1} \quad /5/$$

С другой стороны, очевидно, что для любого подмножества $A \subseteq E^n$
 $\ell_c(A) \leq |A|$.

Значит, для почти всех подмножеств

$$\ell_c(A) \leq |A| \leq (1 + \delta'') \cdot 2^{n-1} \quad /6/$$

Из неравенств /5/ и /6/ следует теорема.

S u m m a r y

Minimization of Boolean functions in the class of ball coverings

Suppose $S^k(\alpha)$ is the ball with radius k and center α of Hamming's metric in the n -dimensional unit cube E^n . We say that $\mathcal{M} = \{S^{k_1}(\alpha_1), S^{k_2}(\alpha_2), \dots, S^{k_r}(\alpha_r)\}$ is the ball covering of subset $N \subseteq E^n$ if $N = \bigcup_{i=1}^r S^{k_i}(\alpha_i)$. Number r is called the length of the ball covering. $\ell_c(N)$, $\ell_k(N)$ and $\ell_{\text{нп}}(N)$ are called lengths of reduced, shortest and lengthest unreduced ball coverings of subset N correspondingly, and $\ell'_c(n)$, $\ell'_k(n)$, $\ell'_{\text{нп}}(n)$ are called maximal significances of $\ell_c(N)$, $\ell_k(N)$, $\ell_{\text{нп}}(N)$ correspondingly. In this paper we prove the following:

Theorem 4 $\ell_c(n) = \ell_{\text{нп}}(n) = \ell_k(n)$

Theorem 5 For almost all subsets $N \subseteq E^n$

$$(1 - \delta') \cdot 2^{n-1} \leq \ell_k(N) \leq \ell_{\text{нп}}(N) \leq \ell_c(N) \leq (1 + \delta'') \cdot 2^{n-1} \quad \text{where } \delta' \rightarrow 0, \delta'' \rightarrow 0.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Quine W.V.: A way to simplify truth functions. Amer. Math. Monthly 62, № 9, 1955.
2. Яблонский С.В.: Функциональные построения в k -значной логике. Труды Мат. института им. В.А. Стеклова, т. 51, 1958.
3. Журавлев Ю.И.: Теоретико-множественные методы в алгебре логики. Проблемы кибернетики, вып. 8., 1962.
4. Васильев Ю.Л.: О сравнении сложности тупиковых и минимальных д.н.ф. Проблемы кибернетики, вып. 10, 1963.
5. Глаголев В.В.: Некоторые оценки д.н.ф. функций алгебры логики. Проблемы кибернетики, вып. 19, 1967.
6. Сапоженко А.А.: Геометрические свойства почти всех функций алгебры логики. Проблемы кибернетики, вып. 30, 1975.
7. Дискретная математики и математические вопросы кибернетики. т. 1, 1974.
8. Hamming R.W.: Error detecting and error correcting codes. BSTS, v. 29, 1950, 147-160.

К ВОПРОСУ МИНИМИЗАЦИИ СИСТЕМ СЛАБО ОПРЕДЕЛЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Асланян Л.А.

В данной статье мы снова обращаемся к задаче минимизации булевых функций. Она уже долгое время служит предметом активных научных исследований и в настоящее время в ней получены значительные результаты. Известно, например, что основные типы минимальных представлений булевых функций не на много проще, чем их задание таблицей [1, 2]. Работа универсальных алгоритмов минимизации связана с большими трудностями [3-5]. С другой стороны в ряде случаев считается, что вопросы минимизации булевых функций утратили их первоначальную значимость для современной техники. Вместе с этим, следует считаться с тем, что необходимость в минимизации булевых функций не отпадает, и что самое главное, это одна из важных модельных теоретических задач дискретной математики, имеющая многочисленные приложения в различных ее областях.

В данной статье мы обращаемся к так называемым слабо определенным булевым функциям, как к классу булевых функций, важному для практических приложений [6, 7].

§ 1. Сведение системы слабо определенных булевых функций к индивидуальным функциям

Пусть E^n — множество всех вершин n -мерного единичного куба ($E = \{0, 1\}$, E^n — n -я декартова степень множества E). Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется частичной булевой функцией /ч.б.ф./, если она определена на некотором подмножестве $M_f \subseteq E^n$ принимая на вершинах $\tilde{\alpha} \in M_f$ значения 0 или 1. С каждой ч.б.ф. f удобно связать пару M_f^0, M_f^1 подмножеств E^n , таких, что $M_f^0 \cup M_f^1 = M_f$, $M_f^0 \cap M_f^1 = \emptyset$, и тогда

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{если } \tilde{x} \in M_f^0 \\ 1 & \text{если } \tilde{x} \in M_f^1 \\ \text{не определена, если } \tilde{x} \in E^n \setminus (M_f^0 \cup M_f^1). \end{cases}$$

Вся область определенности M_f функции f в отдельных случаях составляет незначительную часть всего пространства E^n . В [6] ч.б.ф. называется слабо определенной /с.б.ф./, если $|M_f|$ не превосходит по порядку десятков или сотен, когда $n \leq 40$. Мы будем рассматривать целочисленные функции $k(n)$ и $l(n)$, $k(n) = |M_f^1|$ и $l(n) = |M_f^0|$, а в качестве условия слабо определенности - $\frac{(k(n) + l(n))^2}{2^n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Класс всех ч.б.ф. с $k(n)$ единичными и $l(n)$ нулевыми значениями обозначим через $\Phi_2(n, k(n), l(n))$. Рассмотрим целочисленные m -мерные вектор функции $\tilde{k}(n)$ и $\tilde{l}(n)$ и систему $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ ч.б.ф., зависящих от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n , для которых $|M_{f_i}^1|$ и $|M_{f_i}^0|$ равны соответственно $k_i(n)$ и $l_i(n)$, то есть i -ым координатам векторов $\tilde{k}(n)$ и $\tilde{l}(n)$. Представим эту систему в табличном виде:

x_1	x_2	\dots	x_n	$f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_m$
0	0	\dots	0	
0	0	\dots	1	
\dots	\dots	\dots	\dots	
α_1	α_2	\dots	α_n	$f_i(\tilde{\alpha})$
\dots	\dots	\dots	\dots	
1	1	\dots	1	
				k_1, k_2, \dots, k_m
				l_1, l_2, \dots, l_m

/2/

Согласно /2/ легко заметить, что тривиальным подходом в минимизации систем ч.б.ф. может служить следующее. Вводим в рассмотрение новые $P = \lceil \log_2 m \rceil$ переменные y_1, y_2, \dots, y_P . Кодировем функции f_i , $i=1, 2, \dots, m$ бинарными записями $\langle y_1, y_2, \dots, y_P \rangle$ чисел $i-1$. Тогда вся система /2/ представляется как булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_P)$ имеющая $\sum_i k_i(n)$ единич-

ных и $\sum_i \ell_i(n)$ нулевых значений. Исходные функции системы /2/ получаются от f подстановками констант вместо y_1, y_2, \dots, y_p .

Минимизация ч.б.ф. $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_p)$, зависящих от $n + \lceil \log_2 m \rceil$ переменных, иногда может оказаться проще минимизации m отдельных функций, зависящих от n переменных. Однако, как просто убедиться, в условиях работ [2, 8] такой выигрыш почти незначителен.

Условия слабой определенности уделяют больше возможностей для сведения систем б.ф. к индивидуальным функциям. Назовем систему /2/ ч.б.ф. приводимой, если для всякого $\tilde{\alpha} \in E^n$ среди значений $f_i(\tilde{\alpha}), i=1, 2, \dots, m$ не содержится одновременно 0 и 1. Понятно, что приводимая система ч.б.ф. эквивалентна одной б.ф. n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^m f_i(\tilde{x})$, число единиц и нулей которого не превосходят соответственно $\sum_i k_i(n)$ и $\sum_i \ell_i(n)$. Посчитаем число всех систем /2/ с характеристиками $\tilde{k}(n)$ и $\tilde{\ell}(n)$:

$$s(\tilde{k}(n), \tilde{\ell}(n)) = \prod_{i=1}^m C_{2^n}^{k_i(n)} \cdot \prod_{i=1}^m C_{2^{n-k_i(n)}}^{\ell_i(n)}.$$

Аналогично, для числа всех приводимых систем /2/ имеем

$$s_0(\tilde{k}(n), \tilde{\ell}(n)) \geq \prod_{i=1}^m C_{2^n}^{k_i(n)} \cdot \prod_{i=1}^m C_{2^{n-\sum_j k_j(n)}}^{\ell_i(n)}$$

Сравнением полученных формул убеждаемся, что

Теорема 1. Для характеристик $\tilde{k}(n)$ и $\tilde{\ell}(n)$ таких, что при $n \rightarrow \infty$ $\sum_i k_i(n) \cdot \sum_i \ell_i(n) / 2^n \rightarrow 0$ почти все системы с.б.ф. приводимые.

Итак, в типичном случае здесь главным является задача минимизации одной б.ф. к рассмотрению которого мы и переходим. Теоретически аспекты данного вопроса рассмотрены Ю.И. Журавлевым в [9]. В частности, мы будем исходить из следующего утверждения этой работы:

Теорема 2. Минимальная дизъюнктивная нормальная форма /д.н.ф./ ч.б.ф. f получается из сокращенной д.н.ф. $\partial \chi_f$ путем

удаления некоторых элементарных конъюнкций.

Согласно с этим для минимизации ч.б.ф. в классе д.н.ф. далее в этой работе мы рассматриваем вопросы синтеза и сложности сокр. д.н.ф. таких функций.

§ 2. О сложности сокращенной дизъюнктивной нормальной формы слабо определенных булевых функций.

В условиях слабой определенности количественные характеристики элементов сокр. д.н.ф. булевых функций исследовались в [10-12]. Приведем основные известные результаты.

В [10] получена формула для среднего значения числа k -мерных максимальных интервалов функций класса $\varphi_2(n, k(n), \ell(n))$:

$$\bar{I}_k(n, k(n), \ell(n)) = C_n^k 2^{n-k} \frac{\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j C_{n-k}^j C_{2^k(2^{n-k}-1-j)}^{\ell(n)}}{C_{2^n}^{\ell(n)}}. \quad /3/$$

$$\left(1 - \frac{C_{2^{n-\ell(n)}-2^k}^{k(n)}}{C_{2^{n-\ell(n)}}^{k(n)}} \right)$$

Эта формула была подвергнута дальнейшим упрощениям в работах [11, 12], где доказано, что при $n \rightarrow \infty$ и $\frac{\ell^2(n)}{2^n} \rightarrow 0$

$$\bar{I}_k(n, k(n), \ell(n)) \sim C_n^k 2^{n-k} \frac{(n-k)! 2^{k\ell(n)}}{\ell(n)!} \frac{S(\ell(n), n-k, 2^{n-k}-(n-k)+1)}{C_{2^n}^{\ell(n)}}$$

$$\left(1 - \frac{C_{2^{n-\ell(n)}-2^k}^{k(n)}}{C_{2^{n-\ell(n)}}^{k(n)}} \right)$$

/4/

где $S(l, k, t)$ - известные в комбинаторике обобщенные числа Стирлинга второго рода [13]. В приложении 2 приводятся формулы для этих чисел, на основании которых

$$I_k(n, k(n), l(n)) \sim C_n^k 2^{n-k} \left(1 - \frac{1}{2^{n-k}}\right)^{l(n)} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2^{n-k-1}}\right)^{l(n)}\right)^{n-k} \left(1 - \frac{C_{2^{n-l(n)}-2^k}^{k(n)}}{C_{2^{n-l(n)}}^{k(n)}}\right) \quad /5/$$

если $\frac{l^2(n)}{2^n} \rightarrow 0$ и $\frac{(n-k)^2}{l(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Параллельно этому, независимыми рассуждениями доказано, что

$$I_k(n, k(n), l(n)) \sim C_n^k 2^{(n-k)(k+1)} \frac{C_{2^n}^{l(n)-(n-k)}}{C_{2^n}^{l(n)}} \left(1 - \frac{C_{2^{n-l(n)}-2^k}^{k(n)}}{C_{2^{n-l(n)}}^{k(n)}}\right) /6/$$

когда $\frac{l(n)}{2^n} \rightarrow 0$ и $\frac{l(n)(n-k)}{2^{n-k}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Итак, две последние формулы можно считать существенным упрощением исходной формулы для $I_k(n, k(n), l(n))$. Мы постараемся использовать эти формулы для того, чтобы получить приемлемые выражения для сложности сокр. д.н.ф. функций класса $\varphi_2(n, k(n), l(n))$.

С этой целью проведем дальнейшее упрощение полученных формул. Проведем попарное сравнение следующих трех выражений:

$$a = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2^{n-k-1}}\right)^{l(n)}\right]^{n-k}, \quad b = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2^{n-k}}\right)^{l(n)}\right]^{n-k}, \quad c = \left(1 - e^{-\frac{l(n)}{2^{n-k}}}\right)^{n-k}$$

При этом мы часто будем обращаться к следующим формулам:

Φ_1 . Если $0 \leq x \leq 1$ и $y \geq 0$, то

$$\exp(x(1-\frac{x}{2})y) \leq (1+x)^y \leq \exp(xy).$$

Φ_2 . Если $0 \leq x \leq 1$ и $y \geq 0$, то $(1-x)^y \leq \exp(-xy)$, и $\exp(-x(1+x)y) \leq (1-x)^y$, когда $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ и $y \geq 0$.

Φ_3 . Если x и y - натуральные числа и $x \leq y$, то

$$(1-\frac{x}{y})^{\frac{x-1}{2}} \leq \prod_{i=1}^{x-1} (1-\frac{i}{y}) \leq (1-\frac{x}{2y})^{x-1}$$

Φ_4 . Если $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, то $(1+x)^y \sim \exp(xy) \rightarrow x^2 y \rightarrow 0$.

Рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= 1 - \frac{(1-\frac{1}{2^{n-k}-1})^{\ell(n)} - (1-\frac{1}{2^{n-k}})^{\ell(n)} n-k}{1 - (1-\frac{1}{2^{n-k}})^{\ell(n)}} = \\ &= 1 + (1-\frac{1}{2^{n-k}})^{\ell(n)} \frac{1 - (1-\frac{1}{2^{n-k}-1})^{\ell(n)} n-k}{1 - (1-\frac{1}{2^{n-k}})^{\ell(n)}} \end{aligned}$$

Согласно Φ_4 $a \sim b$ тогда и только тогда, когда

$$d = (n-k) \left(1 - \frac{1}{2^{n-k}}\right)^{\ell(n)} \frac{1 - (1-\frac{1}{2^{n-k}-1})^{\ell(n)}}{1 - (1-\frac{1}{2^{n-k}})^{\ell(n)}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Предположим, что $\frac{\ell(n)}{2^{2(n-k)}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Основываясь на формулах Φ_2 и Φ_4 легко убедиться, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left(1 - \frac{1}{2^{n-k}}\right)^{\ell(n)} \sim e^{-\frac{\ell(n)}{2^{n-k}}},$$

$$1 - \left(1 - \frac{1}{2^{n-k-1}}\right)^{\ell(n)} \leq 1 - e^{-\frac{\ell(n)}{(2^{n-k-1})^2} - \frac{\ell(n)}{(2^{n-k-1})^4}} \sim \frac{\ell(n)}{2^{2(n-k)}},$$

$$1 - \left(1 - \frac{1}{2^{n-k}}\right)^{\ell(n)} \geq 1 - e^{-\frac{\ell(n)}{2^{n-k}}} \sim \frac{\ell(n)}{2^{n-k}}$$

Подставляя эти формулы в выражения для d находим, что

$$d \leq (n-k) e^{-\frac{\ell(n)}{2^{n-k}}} \cdot \frac{\ell(n)}{2^{2(n-k)}} \cdot \frac{2^{n-k}}{\ell(n)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

откуда следует, что $a \sim b$, когда $\frac{\ell(n)}{2^{2(n-k)}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В том случае, когда условие $\frac{\ell(n)}{2^{2(n-k)}} \rightarrow 0$ не выполняется, $\frac{\ell(n)}{2^{n-k}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда согласно Φ_2

$$(n-k) \left(1 - \frac{1}{2^{n-k}}\right)^{\ell(n)} \leq (n-k) e^{-\frac{\ell(n)}{2^{n-k}}} \leq \frac{(n-k) 2^{n-k}}{\ell(n)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Последнее утверждение очевидно при $n-k$ -ограниченном. Если $n-k \rightarrow \infty$, то оно доказывается заменой $\ell(n)$ на $2^{2(n-k)}$ с учетом того, что $\ell(n) > 2^{2(n-k)}$ при $n \rightarrow \infty$. С помощью доказанного свойства достаточно применить к b и c Φ_2 , чтобы прийти к $b \sim c \sim 1$. С одной стороны очевидно, что $1 \geq a \geq b$, откуда окончательно получаем, что

$$a \sim b \sim c \sim 1, \quad \text{когда } \frac{\ell(n)}{2^{2(n-k)}} \neq 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Для полного доказательства эквивалентности $a \sim b \sim c$ при $n \rightarrow \infty$ остается доказать эквивалентность формул b и c при условии $\frac{l(n)}{2^{2(n-k)}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это тоже можно сделать при помощи уже использованных нами рассуждений. Итак доказана

Л е м м а 1. $a \sim b \sim c$ при $n \rightarrow \infty$, когда $l(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, $n > k$.

В силу этой леммы перепишем /5/ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{I}_k(n, k(n), l(n)) &\sim C_n^{k(n)} 2^{n-k} \left(1 - \frac{1}{2^{n-k}}\right)^{l(n)} \left(1 - e^{-\frac{l(n)}{2^{n-k}}}\right)^{n-k} \\ &\left(1 - \frac{C_n^{k(n)} 2^{n-l(n)-2^k}}{C_n^{k(n)} 2^{n-l(n)}}\right) \end{aligned} \quad /7/$$

когда $\frac{l^2(n)}{2^n} \rightarrow 0$ и $\frac{(n-k)^2}{l(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

В предложении, что $\frac{l^2(n)}{2^n} \rightarrow 0$ и $\frac{l(n)(n-k)}{2^{n-k}} \rightarrow 0$ с $n \rightarrow \infty$ можно несколько упростить и /6/,

$$\begin{aligned} \bar{I}_k(n, k(n), l(n)) &\sim C_n^{k(n)} 2^{n-k} \frac{l(n)!}{[l(n) - (n-k)]! 2^{2(n-k)}} \\ &\left(1 - \frac{C_n^{k(n)} 2^{n-l(n)-2^k}}{C_n^{k(n)} 2^{n-l(n)}}\right) \end{aligned} \quad /8/$$

Перейдем к тому, что на основе формул /7/ и /8/ выясним характер изменения значений $\bar{I}_k(n, k(n), l(n))$ при изменении k от 0 до n . Для этого составим отношение \bar{I}_{k+1}/\bar{I}_k .

$$d_k(n, k(n), \ell(n)) = \frac{\bar{I}_{k+1}(n, k(n), \ell(n))}{\bar{I}_k(n, k(n), \ell(n))} \sim \frac{n-k}{2(k+1)}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^{n-k}-1}\right)^{\ell(n)} \left(1 - e^{-\frac{2\ell(n)}{2^{n-k}}}\right)^{-1}.$$

/9/

$$\left(1 + e^{-\frac{\ell(n)}{2^{n-k}}}\right)^{n-k} \frac{C_{2^{n-\ell(n)}}^{k(n)} - C_{2^{n-\ell(n)}-2^{k+1}}^{k(n)}}{C_{2^{n-\ell(n)}}^{k(n)} - C_{2^{n-\ell(n)}-2^k}^{k(n)}}$$

когда $\frac{\ell^2(n)}{2^n} \rightarrow 0$ и $\frac{(n-k)^2}{\ell(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и

$$d_k(n, k(n), \ell(n)) \sim \frac{n-k}{4(k+1)} \frac{2^{2(n-k)}}{\ell(n) - (n-k) + 1}.$$

/10/

$$\cdot \frac{C_{2^{n-\ell(n)}}^{k(n)} - C_{2^{n-\ell(n)}-2^{k+1}}^{k(n)}}{C_{2^{n-\ell(n)}}^{k(n)} - C_{2^{n-\ell(n)}-2^k}^{k(n)}}$$

когда $\frac{\ell^2(n)}{2^n} \rightarrow 0$ и $\frac{\ell(n)(n-k)}{2^{n-k}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим выражение $B(k(n))$, определив его следующим образом:

$$B(k(n)) = \frac{C_{2^{n-\ell(n)}}^{k(n)} - C_{2^{n-\ell(n)}-2^{k+1}}^{k(n)}}{C_{2^{n-\ell(n)}}^{k(n)} - C_{2^{n-\ell(n)}-2^k}^{k(n)}}, \quad 2^{n-k(n)-\ell(n)} \geq 0.$$

Предположим, что $2^{n-k(n)-\ell(n)-2^{k+1}} \geq 0$. Тогда очевидно,

что $B(k(n)) \geq 1$ и что $B(1)=2$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
 B(k(n)+1) &= \frac{(2^n - k(n) - l(n)) C_{2^n - l(n)}^{k(n)} - (2^n - k(n) - l(n) - 2^{k+1}) C_{2^n - l(n) - 2^{k+1}}^{k(n)}}{(2^n - k(n) - l(n)) C_{2^n - l(n)}^{k(n)} - (2^n - k(n) - l(n) - 2^k) C_{2^n - l(n) - 2^k}^{k(n)}} \\
 &= \frac{(2^n - k(n) - l(n)) (C_{2^n - l(n)}^{k(n)} - C_{2^n - l(n) - 2^{k+1}}^{k(n)} + 2 \cdot 2^k C_{2^n - l(n) - 2^{k+1}}^{k(n)})}{(2^n - k(n) - l(n)) (C_{2^n - l(n)}^{k(n)} - C_{2^n - l(n) - 2^k}^{k(n)} + 2^k C_{2^n - l(n) - 2^k}^{k(n)})}
 \end{aligned}$$

Опираясь на это представление $B(k(n)+1)$ и на соотношение

$$C_{2^n - l(n) - 2^{k+1}}^{k(n)} \leq C_{2^n - l(n) - 2^k}^{k(n)}.$$

легко убедиться, что из $B(k(n)) \leq 2$ следует, что $B(k(n)+1) \leq 2$. Таким образом мы доказали, что при $2^n - l(n) - k(n) - 2^{k+1} \geq 0, 1 \leq B(k(n)) \leq 2$.

Если $2^n - l(n) - k(n) - 2^k \leq 0$, то очевидно, что $B(k(n))=1$.
 Далее, предположим $2^k < 2^n - l(n) - k(n) < 2^{k+1}$. В этом случае тоже $B(k(n)) \geq 1$ и $B(k(n)) = 1/C(k(n))$, где

$$\begin{aligned}
 C(k(n)) &= 1 - \frac{C_{2^n - l(n) - 2^k}^{k(n)}}{C_{2^n - l(n)}^{k(n)}} = 1 - \left(1 - \frac{2^k}{2^n - l(n)} \right) \dots \\
 &\dots \left(1 - \frac{2^k}{2^n - l(n) - k(n) + 1} \right).
 \end{aligned}$$

$$2^{n-l(n)-k(n)+1} \leq 2 \cdot 2^k \quad \text{и поэтому} \quad 1 - \frac{2^k}{2^{n-l(n)-k(n)+1}} \leq \frac{1}{2}.$$

Приходим к тому, что $C(k(n)) \geq \frac{1}{2}$ откуда окончательно

$$1 \leq B(k(n)) \leq 2.$$

В дальнейшем нам будет полезна

Л е м м а 2. Числа $d_k(n, k(n), l(n))$ монотонно убывают с ростом k при $n \rightarrow \infty$, если $\frac{l^2(n)}{2^n} \rightarrow 0$ с $n \rightarrow \infty$.

Некоторая трудность в доказательстве этой леммы возникает в связи с тем, что формулы /9/ и /10/ представляют не сами числа, а асимптотические выражения для них.

Однако заметим, что при увеличении k на 1 увеличение рассмотренного только что члена $B(k(n))$ в выражениях /9/ и /10/ не может быть больше, чем в два раза. Все остальные члены этих выражений монотонно убывают по росту k . Если при этом их общее уменьшение сильнее, чем уменьшение в $1/(2+\alpha)$ раз, где $\alpha \geq \text{const} > 0$, то даже с учетом того, что /9/ и /10/ представляют лишь эквивалентные к $d_k(n, k(n), l(n))$ выражения, мы можем заключить, что эти числа монотонно убывают по росту k , когда $n \rightarrow \infty$. Докажем, что указанное уменьшение имеет место.

В /10/ только за счет изменения множителя $2^{2(n-k)}$ при увеличении k на единицу появляется дополнительный множитель $1/4$.

Перейдем к рассмотрению /9/. Предположим, что $\frac{l(n)}{2^{2(n-k)}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Мы полагаем, что $l(n) \rightarrow \infty$ с $n \rightarrow \infty$ и поэтому $\frac{l(n)}{2^{n-k}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. В члене $\left(1 - \frac{1}{2^{n-k-1}}\right)^{l(n)}$ при увеличении k на единицу добавляется множитель $\left(1 - \frac{2^{n-k}}{(2^{n-k-2})^2}\right)$, который в данном случае стремиться к нулю

при $n \rightarrow \infty$.

Если $\frac{\ell(n)}{2^{2(n-k)}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то из /9/ с учетом φ_4 легко получить, что

$$\frac{d_{k+1}(n, k(n), l(n))}{d_k(n, k(n), l(n))} \sim e^{-\frac{\ell(n)}{2^{n-k}}} \left(1 + e^{-\frac{2\ell(n)}{2^{n-k}}} \right)^{-2} \quad /11/$$

$$\left(\frac{1 + e^{-\frac{2\ell(n)}{2^{n-k}}}}{1 + e^{-\frac{\ell(n)}{2^{n-k}}}} \right)^{n-k} \cdot \tau$$

где $1/2 \leq \tau \leq 2$. Если $e^{-\frac{\ell(n)}{2^{n-k}}} \leq \frac{1}{3}$ то уже наличие этого члена в /11/ достаточно для указанного заключения. Если $e^{-\frac{\ell(n)}{2^{n-k}}} \geq \frac{2}{3}$, то только второй множитель /11/ не превосходит 81/169, что тоже достаточно для указанного выхода. В остальных случаях достаточно заметить, что $n-k \rightarrow \infty$ и что третий множитель /11/ при этом просто стремится к нулю. Лемма доказана полностью.

Сделаем одно важное замечание. Если $\frac{\ell(n)}{2^{2(n-k)}} \neq 0$ при $n \rightarrow \infty$, то легко заметить, что $\frac{(n-k)^2}{\ell(n)} \rightarrow 0$. Кроме того, как уже отмечалось, в этом случае $\frac{\ell(n)}{2^{n-k}} \rightarrow \infty$, так что окончательно:

$$d_k(n, k(n), \ell(n)) \asymp \frac{n-k}{k} \left(1 - \frac{1}{2^{n-k-1}} \right)^{\ell(n)} \left(1 + e^{-\frac{\ell(n)}{2^{n-k}}} \right)^{n-k}$$

Согласно φ_1 и φ_2 :

$$(n-k) \left(1 - \frac{1}{2^{n-k-1}}\right)^{\ell(n)} \left(1 + e^{-\frac{\ell(n)}{2^{n-k}}}\right)^{n-k} \leq$$

$$\leq (n-k) e^{-\frac{\ell(n)}{2^{n-k}}} \exp\left((n-k) e^{-\frac{\ell(n)}{2^{n-k}}}\right).$$

В силу $\frac{\ell(n)}{2^{2(n-k)}} \neq 0$, $\frac{\ell(n)}{2^{n-k}} \geq 2^{n-k}$, и поэтому $(n-k) e^{-\frac{\ell(n)}{2^{n-k}}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда далее следует, что $d_k(n, k(n), \ell(n)) \lesssim 1/k$, где в силу $\frac{\ell(n)}{2^{n-k}} \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Окончательно заключаем, что $\frac{\ell(n)}{2^{2(n-k)}} \neq 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $d_k(n, k(n), \ell(n)) \rightarrow 0$.

Итак, если утверждение леммы 2 говорит о том, что числа $\bar{I}_k(n, k(n), \ell(n))$ имеют единственный максимум по k /который может быть, достигаться в двух соседних точках k^* и k^*+1 / и что при изменении k /как при увеличении, так и при уменьшении/, то этого "максимального" значения, числа $\bar{I}_k(n, k(n), \ell(n))$ убывают все быстрее, то последнее значение указывает на то, что $\max_k \bar{I}_k(n, k(n), \ell(n))$ не может находиться в области значений параметра k , где $\frac{\ell(n)}{2^{2(n-k)}} \neq 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Перейдем к выяснению следующего вопроса о поведении чисел $d_k(n, k(n), \ell(n))$. При каких условиях изменение значения k от точки максимума на единицу приводит к уменьшению значения $\bar{I}_k(n, k(n), \ell(n))$, которое выражается в множителе при $\bar{I}_k(n, k(n), \ell(n))$ стремящемся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Действительно, если нам известно, что $\max_k \bar{I}_k(n, k(n), \ell(n))$ достигается в точках k^* или k^*+1 , то если k тому же

$d = \max(d_{k^*-1}^{-1}, d_{k^*+1}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то слагаемые сумм

$$\sum_{k=0}^{k^*} \bar{I}_k(n, k(n), l(n)) \quad \text{и} \quad \sum_{k=k^*+1}^n \bar{I}_k(n, k(n), l(n))$$

мажорируются. соответственно членам геометрических уравнений со знаменателем, равным d и начальными членами $\bar{I}_{k^*}(n, k(n), l(n))$ и $\bar{I}_{k^*+1}(n, k(n), l(n))$ соответственно.

Поэтому, в этих условиях при $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=0}^{k^*} \bar{I}_k(n, k(n), l(n)) \sim \bar{I}_{k^*}(n, k(n), l(n)),$$

$$\sum_{k=k^*+1}^n \bar{I}_k(n, k(n), l(n)) \sim \bar{I}_{k^*+1}(n, k(n), l(n))$$

а среднее значение сложности сокр. д.н.ф.

$$\bar{S}(n, k(n), l(n)) = \sum_{k=0}^n \bar{I}_k(n, k(n), l(n)) \sim$$

$$\sim \bar{I}_{k^*}(n, k(n), l(n)) + \bar{I}_{k^*+1}(n, k(n), l(n)).$$

Если резкое изменение значения $\bar{I}_k(n, k(n), l(n))$ вблизи точки максимума не имеет места, то есть $d \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то знание $\max_k \bar{I}_k(n, k(n), l(n))$ не позволит нам существенно упростить сумму $\bar{S}(n, k(n), l(n))$, и в этом случае на, по видимому, придется довольствоваться более грубыми оценками вида

$$\max_k \bar{I}_k(n, k(n), l(n)) \leq \bar{S}(n, k(n), l(n)) \leq n \cdot \max_k \bar{I}_k(n, k(n), l(n)).$$

Перейдем к решению поставленного вопроса. Из /10/ видно, что изменение значения k на единицу меняет $d_k(n, k(n), l(n))$ на ограниченный множитель. Значит, резкое изменение $d_k(n, k(n), l(n))$ возможно только при условиях /9/. Учитывая также замечание о том, что в области максимума $\frac{l(n)}{2^{2(n-k)}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ приходим к тому, что нужно поискать резкое изменение выражения

$$d_k(n, k(n), l(n)) \sim \frac{n-k}{k} e^{-\frac{l(n)}{2^{n-k}}} \left(1 - e^{-\frac{l(n)}{2^{n-k}}}\right)^{-1} \left(1 + e^{-\frac{l(n)}{2^{n-k}}}\right)^{n-k}$$

когда $\frac{l^2(n)}{2^n} \rightarrow 0$, $\frac{(n-k)^2}{l(n)} \rightarrow 0$ и $\frac{l(n)}{2^{2(n-k)}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

При этом для соотношения d_{k+1}/d_k справедливо /11/.

Из /11/ видно, например, что резкое изменение $d_k(n, k(n), l(n))$ имеет место когда $\frac{l(n)}{2^{n-k}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

В противном случае обозначим $e^{-\frac{l(n)}{2^{n-k}}}$ через α и рассмотрим

$$\text{выражение } \left(\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha}\right)^{n-k} = \left(1 - \frac{\alpha(1-\alpha)}{1+\alpha}\right)^{n-k}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

В этом случае $n-k \rightarrow \infty$ и для стремления к нулю записанного выражения согласно φ_4 необходимо и достаточно, чтобы $\alpha(1-\alpha)(n-k) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Случай $\alpha \rightarrow 0$ рассмотрели выше. Если $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$ то условие $\alpha(1-\alpha)(n-k) \rightarrow \infty$ выполняется тоже. При $\alpha \rightarrow 1$ приходим к $\alpha(1-\alpha)(n-k) \sim \frac{l(n)(n-k)}{2^{n-k}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, что и является окончательным условием.

Итак, если $\frac{\ell^2(n)}{2^n} \rightarrow 0$, $\frac{\ell(n)}{2^{2(n-k)}} \rightarrow 0$ и $\frac{\ell(n)(n-k)}{2^{n-k}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то для $d_k(n, k(n), \ell(n))$ справедливо /11/. Изменение значения параметра k на единицу добавляет в выражение для $d_k(n, k(n), \ell(n))$ множитель, не ограниченный от нуля или от бесконечности при $n \rightarrow \infty$. Поэтому задача поиска $\max_k \mathbb{I}_k(n, k(n), \ell(n))$ сводится к нахождению значения k^* , где $d_k(n, k(n), \ell(n)) \asymp \text{const}$, или же пары соседних целочисленных значений k^* и k^*+1 таких, что $d_{k^*}(n, k(n), \ell(n)) \rightarrow \infty$ и $d_{k^*+1}(n, k(n), \ell(n)) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Приступим к выводу конкретных оценок для сложности сокр.д.н.ф. Рассмотрим снова выражение $C(k(n))$.

$$C(k(n)) = 1 - \left(1 - \frac{2^k}{2^n - \ell(n) - \nu k(n)}\right)^{k(n)} = 1 - \exp \left[k(n) \ln \left(1 - \frac{2^k}{2^n - \ell(n) - \nu k(n)}\right) \right]$$

где $0 < \nu < 1$. Предположим, что $\frac{k(n)}{2^{n-k}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тогда $k(n) \ln \left(1 - \frac{2^k}{2^n - \ell(n) - \nu k(n)}\right) \sim -\frac{k(n)}{2^{n-k}}$, а рассматриваемое выражение эквивалентно при $n \rightarrow \infty$.

Если же $\frac{k(n)}{2^{n-k}} \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то как просто видеть, рассматриваемое нами выражение остается ограниченное от нуля, и не превосходит единицы при $n \rightarrow \infty$.

Сделанное замечание позволяет для каждого фиксированного значения параметра k учесть влияние числа единичных значений функций, $k(n)$, на количество появляющихся максимальных k -мерных интервалов этих функций. Перейдем к решению задачи нахождения значения k^* , на котором достигаются $\max_k \mathbb{I}_k(n, k(n), \ell(n))$.

Рассмотрим условие $\frac{l(n)(n-k)}{2^{n-k}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Очевидно, что для этого необходимо, чтобы $n-k \leq l(n)$. Подставив $l(n)$ вместо $n-k$ в числителе имеем, что $n-k \leq 2 \log l(n)$. Подставляя вторично получаем, что $k \geq n - \log l(n) - \log \log l(n) - 1$. Из условия $\frac{l^2(n)}{2^n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ имеем, что $\log l(n) < \frac{n}{2}$, так что окончательно приходим к тому, что $k \asymp n$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $\frac{l(n)}{2^{n-k}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Предположим, что $l(n) \geq n^8$, и рассмотрим формально /так как в действительности значения параметра k должны быть целочисленными/ значение k_0 , определяемое следующей формулой:

$$k_0 = n - \log \frac{l(n)}{\log \frac{\log l(n)}{\log n}} = \quad /12/$$

$$= n - \log l(n) + \log(\log \log l(n) - \log \log n)$$

Это выражение корректное, ввиду того, что $\frac{\log l(n)}{\log n} \geq 8 > 1$ согласно принятому выше условию. Кроме того $\log \log \frac{\log l(n)}{\log n} \geq 0$ и поэтому из /12/ получаем, что

$$\log l(n) - \log \log \log l(n) \leq n - k_0 \leq \log l(n),$$

откуда в частности следует, что $n - k_0 \sim \log l(n)$ при $l(n) \rightarrow \infty$.

Имеем также, что

$$e^{-\frac{l(n)}{2^{n-k_0}}} = \left(\frac{\log n}{\log l(n)} \right)^{\log e}, \quad \text{где } 1,44 \leq \log e \leq 1,45,$$

а согласно φ_4 и предположению $l(n) \geq n^8$

$$\left(1 + e^{-\frac{l(n)}{2^{n-k_0}}} \right)^{n-k_0} \leq \exp \left((n-k_0) e^{-\frac{l(n)}{2^{n-k_0}}} \right) \leq \exp \left(\log l(n) \left(\frac{\log n}{\log l(n)} \right)^{\log e} \right)$$

$$= n^{\log e \left(\frac{\log n}{\log l(n)} \right)^{\log e - 1}} \leq n^{\log e \cdot 8^{1 - \log e}} = n^{\alpha_0} \quad \text{где } \alpha_0 < 1$$

Суммируя все сказанное на основе /9/ получаем, что

$$d_{k_0}(n, k(n), l(n)) \leq n^{-\text{const}} \quad \text{где } \text{const} > 0 \text{ и поэтому } d_{k_0} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь значение $k_0 - 1$ /где тоже $n - k \sim \log l(n)$ и $n \times k$ /. В этом случае

$$e^{-\frac{l(n)}{2^{n-k_0+1}}} = \left(\frac{\log n}{\log l(n)} \right)^{\frac{\log e}{2}}$$

а согласно φ_1

$$\begin{aligned} \left(1 + e^{-\frac{l(n)}{2^{n-k_0+1}}} \right)^{n-k_0+1} &\geq \exp(n-k_0+1) e^{-\frac{l(n)}{2^{n-k_0+1}}} \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{l(n)}{2^{n-k_0+1}}} \right) \geq \\ &\geq \exp \left(\log l(n) \left(\frac{\log n}{\log l(n)} \right)^{\frac{\log e}{2}} (1+o(1)) \right) = \\ &= \exp \left(\log n \frac{\log e}{2} \frac{1 - \frac{\log e}{2}}{\log l(n)} (1+o(1)) \right) \geq n^{(1+o(1)) \log e} \end{aligned}$$

Выпишем также следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 2^{n-k_0} &= \frac{l(n)}{\log \varphi(n)}, \quad \left(1 - \frac{1}{2^{n-k_0}} \right)^{l(n)} \sim \varphi(n)^{-\log e}, \\ \left(1 - e^{-\frac{l(n)}{2^{n-k_0+1}}} \right)^{n-k_0+1} &\geq e^{-(n-k_0)\varphi(n)^{-\log e} (1+\varphi(n)^{-\log e})} \end{aligned}$$

откуда аналогично предыдущему случаю получаем, что

$$\overline{S}(n, k(n), l(n)) \geq \frac{l(n)}{n^2} C_n^{n-\lambda}$$

Итак, справедлива

Теорема 3. $\ell(n)n^{-2}C_n^{n-\lambda} \lesssim \bar{s}(n, k(n), \ell(n)) \lesssim \ell(n)C_n^{n-\lambda}$ при $n \rightarrow \infty$,
если $\frac{\ell^2(n)}{2^n} \rightarrow 0$ и $\ell(n) = n^{\varphi(n)}$ где $\varphi(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$,
 $\lambda = [k_0]$ где $k_0 = n - \log \ell(n) + \log(\log \log \ell(n) - \log \log n)$.

Понятно, что согласно неравенству Чебышева здесь верхняя оценка справедлива также для почти всех функций класса $\Phi_2(n, k(n), \ell(n))$.

Предположим, что $\ell(n) = \varepsilon(n)2^{n/2}$, где $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.
При этом $n - \lambda \sim \frac{n}{2} + \log \varepsilon(n)$ когда $n \rightarrow \infty$. Если $\varepsilon(n)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ достаточно медленно, то $C_n^\lambda \sim 2^n \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$ и $n - \lambda \sim \frac{n}{2}$. При этом $\bar{s}(n, k(n), \ell(n)) \gtrsim 2^{3n/2} n^{-5/2}$. Это интересно сравнить с верхней оценкой $\frac{3^n}{\sqrt{n}}$ самой сложной сокр. д.н.ф. функций класса $P_2(n)$, и со сложностью сокр. д.н.ф. класса $P_2(n)$, равной $2^n \cdot n^{(1+\delta)\log \log n}$, где $\delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Если же $\ell(n) = n^{\varphi(n)}$, где $\varphi(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ достаточно медленно, то $\bar{s}(n, k(n), \ell(n)) \lesssim n^{\eta(n)\ell(n)}$, где $\eta(n) \asymp \varphi(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Подставляя в /9/ убеждаемся, что $d_{k_0-1}(n, k(n), \ell(n)) \gtrsim n^{\text{const}}$, $\text{const} > 0$ и поэтому $d_{k_0-1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом формула /12/ действительно определяет точку максимума $\bar{I}_k(n, k(n), \ell(n))$ по k .

Мы предположим, что $\frac{\ell(n)}{2^{n-k}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому, мы должны потребовать также, чтобы это условие выполнялось на найденной точке максимум. Приходим к условию $\frac{\ell(n)}{2^{n-k_0}} = \log \frac{\log \ell(n)}{\log n} \rightarrow \infty$

при $n \rightarrow \infty$, которое означает то, что $\ell(n) = n^{\varphi(n)}$, где $\varphi(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Для конкретности наших дальнейших выводов предположим, что $k(n) \neq \ell(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Остальные случаи могут быть рассмотрены аналогично.

В силу основного условия $\frac{\ell(n)}{2^{n-k}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ $C(k(n)) \in (0, 1)$. Приведем оценки для $\bar{I}_k(n, k(n), \ell(n))$ в точках $\lambda = [k_0]$ и $\lambda + 1$. Для этого рассмотрим оценки для членов выражения /7/ в точках $k_0 - 1$, k_0 и $k_0 + 1$, используя при этом формулы $\varphi_1 - \varphi_4$.

$$2^{n-k_0-1} = 2^{\frac{\ell(n)}{\log \varphi(n)}} \left(1 - \frac{1}{2^{n-k_0+1}}\right)^{\ell(n)} \sim \exp\left(-\frac{\ell(n)}{2^{n-k_0+1}}\right) = \varphi(n)^{-\frac{\log e}{2}},$$

$$\begin{aligned} & e^{-(n-k_0+1)\varphi(n)^{2\log e} (1+\varphi(n)^{-2\log e})} \leq \\ & \leq \left(1 + e^{-\frac{\ell(n)}{2^{n-k_0-1}}}\right)^{n-k_0-1} \leq e^{-(n-k_0-1)\varphi(n)^{2\log e}} \end{aligned}$$

Основываясь на эти соотношения и учитывая характер измерения членов выражения /9/ по k легко выписать оценку $\bar{I}_k(n, k(n), \ell(n))$ в отрезке $[k_0 - 1, k_0 + 1]$. Отсюда получаем окончательно, что $\bar{s}(n, (k(n), \ell(n))) \lesssim \ell(n) C_n^{n-\lambda}$ учитывая при этом, что $\log \ell(n) - \log \log \varphi(n) + i = n - k + i < \log \ell(n)$ при $i = -1, 0, 1$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Глаголев В.В.: Некоторые оценки Д.Н.Ф. функций алгебры логики, Проблемы кибернетики, вып. 19, 1967.
2. Лупанов О.Б.: О синтезе некоторых классов управляющих систем, Проблемы кибернетики, вып. 10, 1963.
3. Яблонский С.В.: Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем, Проблемы кибернетики, вып. 2, 1959.
4. Журавлев Ю.И.: Теоретико-множественные методы в алгебре логики, Проблемы кибернетики, вып. 8, 1962.
5. Васильев Ю.Л.: Трудности минимизации булевых функций на основе универсальных подходов, ДАН СССР, том. 171, № 1, 1966.
6. Закревский А.Д.: Алгоритмы минимизации слабо определенных булевых функций, Кибернетика, № 2, 1965.
7. Асланян Л.А.: Алгоритмы распознавания с логическими отделителями. Сборник работ по математической кибернетике, вып. 1, 1976.
8. Шоломов Л.А.: О реализации недоопределенных булевых функций схемами из функциональных элементов, Проблемы кибернетики, вып. 21, 1969.
9. Журавлев Ю.И.: Об отделимости подмножеств вершин n -мерного единичного куба, Труды Мат. ин-та АН СССР, т. 51, 1958.
10. Mileto F., Putzolu G.: Average values of quantities appearing in Boolean function minimization. IEEE EC-13,2, 1964, 87-92.
11. Асланян Л.А.: О сложности сокращенной дизъюнктивной нормальной формы не всюду определенных функций алгебры логики, 1, Ученые записки ЕГУ, № 1, 1974.
12. Асланян Л.А.: О сложности сокращенной дизъюнктивной нормальной формы не всюду определенных функций алгебры логики

ки, II, Ученые записки ЕГУ, № 3, 1974.

13. Медведев Ю.И., Ивченко Г.И.: Асимптотические представления конечных разностей от степенной функции в произвольной точке, Теор. вер. и ее примен., т. X. 1965.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ СОКРАЩЕННОЙ ДИЗ'ЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

1. Рассмотрим класс $P_2(n)$. Как показано в [1], для почти всех функций $f \in P_2(n)$ сложность сокр. д.н.ф. \mathcal{N}_f этих функций удовлетворяет неравенствам

$$2^{n(1+\epsilon_1)} \log \log n \leq s(f) \leq 2^{n(1+\epsilon_2)} \log \log n,$$

где $\epsilon_1 \rightarrow 0$ и $\epsilon_2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что простая модификация метода, которым получен этот результат, позволяет установить асимптотическую оценку $s(f)$ для почти всех функций класса $P_2(n)$.

Для этого рассмотрим в E^n интервалы размерности k одного фиксированного направления. Легко установить, что среднее значение $m(i_k(f))$ и дисперсия $d(i_k(f))$ случайного числа $i_k(f)$ максимальных интервалов размерности k функций класса $P_2(n)$ при их равновероятном появлении одинаковы для всех направлений, и что они соответственно равны

$$m(i_k(f)) = \frac{2^{n-k}}{2^{2^k}} \left(1 - \frac{1}{2^{2^k}}\right)^{n-k} \quad \text{и} \quad d(i_k(f)) = \frac{2^{n-k}}{2^{2^k}} \left(1 - \frac{1}{2^{2^k}}\right)^{n-k} +$$

$$+ \frac{C_{n-k}^2 2^{n-k}}{2^{2^{k+1}}} \left(1 - \frac{1}{2^{2^k}}\right)^{2(n-k-1)} - (1 + (n-k) + C_{n-k}^2) \frac{2^{n-k}}{2^{2^{k+1}}} \left(1 - \frac{1}{2^{2^k}}\right)^{2(n-k)}.$$

Обозначим через u_j , $j=1,2,\dots,C_n^k$ событие, состоящее в выполнении неравенства $|i_k(f) - m(i_k(f))| \geq +$ для j -ого направления. Тогда согласно известному неравенству для вероятности суммы событий и по теореме Чебышева

$$P(u_1 \vee u_2 \vee \dots \vee u_{C_n^k}) \leq C_n^k P(|i_k(f) - m(i_k(f))| \geq +) \leq \frac{C_n^k d(i_k(f))}{+^2} \quad /1/$$

Рассмотрим $m(i_k(f))$ и выясним, когда $m(i_k(f)) \rightarrow \infty$ с $n \rightarrow \infty$.

1. $k=0$, $m(i_0(f)) = \frac{1}{2}$ /это интересно сопоставить с известным утверждением А.А. Сапоженко о составе компонент связности графов соседства единичных вершин для почти всех булевых функций [2]. Подсчитав среднее значение числа пар.троек и т.д. изолированных единичных вершин функций для любого фиксированного $s \geq 0$ при $n \rightarrow \infty$ можно оценить асимптотически число функций, граф соседства единичных вершин которых состоит из одной связной и компоненты и равно s изолированных вершин [3]/.

2. $k > 0$, k - остается ограниченной при $n \rightarrow \infty$,
 $m(i_k(f)) \rightarrow \infty$ с $n \rightarrow \infty$

3. $k \rightarrow \infty$ с $n \rightarrow \infty$. Ясно, что $\frac{2^{n-k}}{2^{2^k}} \rightarrow \infty$ с $n \rightarrow \infty$ является необходимым условием для $m(i_k(f)) \rightarrow \infty$ с $n \rightarrow \infty$. Если при этом $\frac{n-k}{2^{2^k}} \neq \infty$, то $m(i_k(f)) \rightarrow \infty$ очевидно. Иначе заметим, что

$$\begin{aligned} m(i_k(f)) &\geq \frac{2^{n-k}}{2^{2^k}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n-k}{2^{2^k}} \log_e(1 + \frac{1}{2^{2^k}})}} = \\ &= \frac{n-k}{2^{2^k}} \cdot \frac{2^{(n-k)(1 - \frac{\log(n-k)}{n-k})}}{(n-k) \frac{\log_e}{2^{2^k}} (1 + \frac{1}{2^{2^k}})} \rightarrow \infty \text{ с } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Таким образом, для $m(i_k(f)) \rightarrow \infty$ с $n \rightarrow \infty$ необходимо и достаточно, чтобы $\frac{2^{n-k}}{2^{2^k}} \rightarrow \infty$ с $n \rightarrow \infty$, $k \neq 0$. При этом условии в частности $k^2 = o(n)$ и поэтому $C_n^k \sim \frac{n^k}{k!}$.

$$\frac{d(i_k(f)) \cdot C_n^k}{[m(i_k(f))]^2} = C_n^k \left\{ \frac{1}{m(i_k(f))} + \frac{C_{n-k}^2}{2^{n-k}} \cdot \frac{2^{2^k+1}}{(2^{2^k} - 1)^2} - (1+n-k) \frac{1}{2^{n-k}} \right\},$$

где при $n \rightarrow \infty$ первое слагаемое в фигурных скобках не меньше по порядку двух других и поэтому, для получения асимптотики по /1/ достаточно, чтобы $C_n^k / m(i_k(f)) \rightarrow 0$ с $n \rightarrow \infty$. Это выполняется, в частности, при $k < \log n - 1$, $k \neq 0$.

Утверждение 1. Для значений $k < |\log n|$, $k \neq 0$ из /1/ следует, что у почти всех функций класса $P_2(n)$ одновременно в каждом из C_n^k направлений имеется $i_k(f) \sim m(i_k(f))$ k -мерных максимальных интервалов при $n \rightarrow \infty$.

Составим отношение $r_k = \frac{m(i_{k+1}(f))}{m(i_k(f))} = \frac{1}{2 \left(2^{2^k} - \frac{1}{2^{2^k}} \right)} - \left(1 + \frac{1}{2^{2^k}} \right)^{n-k}.$

$r_0 = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^n$ и r_k монотонно убывает по росту k , т.к. каждый член приведенного выражения для r_k в отдельности убывает при этом. То же самое справедливо и для $m(I_k(f)) = C_n^k \cdot m(i_k(f))$. Таким образом, $m(I_k(f))$ имеет един-

ственный максимум по k . Известно, что этот максимум достигается на точках $\lambda = |\log \log n|$ или $\lambda + 1$.

Рассмотрим среднюю сложность сокр. д.н.Ф. функций класса

$$P_2(n) - \bar{s}(n) = \sum_{k=0}^n m(I_k(f)) = \sum_{k=0}^n C_n^k m(i_k(f))$$

и отношение $R_k = \frac{n-k}{k+1} \cdot r_k = \frac{m(I_{k+1}(f))}{m(I_k(f))}$. Пусть $k_0 = \log \log n$.
при $n \rightarrow \infty$ $R_{k_0} \lesssim \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{\log \log n} \rightarrow 0$ и $R_{k_0-1} \gtrsim \frac{\sqrt{n} \cdot e^{\sqrt{n}}}{(2\sqrt{e}) \log \log n} \rightarrow \infty$.

Так как R_k монотонно убывает по росту k , то $R_{v \geq R_{k_0-1}}$ и стремится к бесконечности при $v \leq \lambda - 1$ и $R_{v \leq R_{k_0}}$ и стремится к нулю при $v \geq \lambda + 1$ с $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что

$$\sum_{k=0}^{\lambda-1} C_n^k \cdot m(i_k(f)) = o(C_n^\lambda (m(i_\lambda(f)))) \quad \text{и что}$$

$$\sum_{k=2+2}^n m(I_k(f)) = o(m(I_{n+1}(f)))$$

при $n \rightarrow \infty$ и поэтому у почти всех функций класса $P_2(n)$ при $n \rightarrow \infty$ число максимальных интервалов разностей, отличных от λ и $\lambda + 1$ не больше, чем некоторое $o\left(\sum_{k=n}^{\lambda+1} m(I_k(f))\right)$. Отсюда из Утверждения 1. следует

Утверждение 2. При $n \rightarrow \infty$ для почти всех функций класса $P_2(n)$

$$s(f) \sim \sum_{k=\lambda}^{\lambda+1} C_n^k \frac{2^{n-k}}{2^{2^k}} \left(1 - \frac{1}{2^{2^k}}\right)^{n-k} \sim \sum_{k=\lambda}^{\lambda+1} C_n^k \frac{2^{n-k}}{2^{2^k}} \exp\left(\frac{-n}{2^{2^k}}\right)$$

Например, для последовательности значений n вида $n = 2^{2^v}$,
 $v \rightarrow \infty$ у почти всех функций $f \in P_2(n)$

$$s(f) \sim 2^n \cdot n^{\log \log n} |e^{n \log n (\log \log n)!}|^{-1}$$

II. Рассмотрим класс $\Phi_2(n, k(n), l(n))$ не всюду определенных функций алгебры логики от n -переменных, с заданным числом $k(n)$ единичных $l(n)$ нулевых значений. Практически важным случаем этого класса функций является $k(n) + l(n) = |E^n| = 2^n$. Среднее число k -мерных максимальных интервалов в классе $\Phi_2(n, k(n), l(n))$ выражается сложной зависимостью параметров $n, k, k(n)$ и $l(n)$. Одну из этих формул можно найти в [4], которая однако не дает возможности оценить оперативно $s(f)$ или проследить за ее общим поведением. Начнем с того, что среднее число k -мерных максимальных интервалов

$$m(I_k(f)) = C_n^k 2^{n-k} \frac{\varphi(n, k(n), l(n))}{C_{2^n}^{l(n)}} \left(1 - \frac{C_{2^{n-l(n)}-2^k}^{k(n)}}{C_{2^{n-l(n)}}^{k(n)}} \right)$$

где $\varphi(n, k(n), l(n))$ - число размещений $l(n)$ нулевых точек в вершинах куба E^n , при котором фиксированный подкуб E^k не содержит, а каждый из его $n-k$ соседних подкубов содержит хотя бы одну нулевую точку. Основываясь на этой интерпретации заметим, что

$$\varphi(n, k(n), l(n)) = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j C_{n-k}^j C_{2^{k(2^{n-k}-1-j)}}^{l(n)}$$

и рассмотрим для нее следующие оценки:

$$\varphi_1 = 2^{k(n-k)} \frac{C_{2^n-2^k}^{\ell(n)-(n-k)}}{2^{k(n-k+1)}} \leq \varphi(n, k(n), \ell(n)) \leq 2^{k(n-k)} \frac{C_{2^n}^{\ell(n)-(n-k)}}{2^n} = \varphi_2.$$

Если предположить, что $\frac{\ell(n)(n-k)}{2^{n-k}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то оказывается, что тогда $\varphi_1 \sim \varphi_2$, и

$$m(I_k(f)) \simeq C_n^k 2^{(n-k)(k+1)} \frac{C_{2^n}^{\ell(n)-(n-k)}}{C_{2^n}^{\ell(n)}} \left(1 - \frac{C_{2^n-\ell(n)-2^k}^{k(n)}}{C_{2^n-\ell(n)}^{k(n)}} \right)$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Глаголев В.В.: Некоторые оценки дизъюнктивных нормальных форм функций алгебры логики. Проблемы кибернетики, вып. 19, 1967.
2. Сапоженко А.А.: Метрические свойства почти всех функций алгебры логики. Дискретный анализ, вып. 10, 1967.
3. Акопова И.А., Асланян Л.А.: Доказательства некоторых оценок сокращенных дизъюнктивных нормальных форм булевых функций. Ученые записки ЕГУ, № 1, 1980 г.
4. Miltto F., Putzolu G.: Average values of quantities appearing in Boolean function minimization. IEEE EC-13,2, 1964, 87-92.

П Р И Л О Ж Е Н И Я II.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЧИСЕЛ СТИРЛИНГА ВТОРОГО РОДА

Числа Стирлинга имеют важное значение в комбинаторике и в теории вероятностей. Числа Стирлинга второго рода $S(n, k)$, $1 \leq k \leq n$ представляют числа различных способов разбиения множества, состоящего из n элементов на k непустых непересекающихся множествах. Часто эти числа определяются как

$$S(n, k) = \frac{\Delta^k 0^n}{k!} = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j (k-j)^n \cdot \frac{1}{k!}$$

В настоящее время полезны также многочисленные приложения этих чисел, которые в литературе встречаются под одним и тем же названием "обобщенные числа Стирлинга". Приведем одно из таких обобщений, которое в дальнейшем и будем рассматривать /см. [1] /:

$$S(n, k, t) = \frac{\Delta^{k+t} n}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j (t+k-j)^n$$

Числа $S(n, k, t)$ представляют число всевозможных размещений n различных объектов по $k+t$ одинаковым ячейкам при условии, что k фиксированных ячеек не окажутся пустыми. В [1] доказывается асимптотическая формула для чисел $S(n, k, t)$ при условии, когда $\frac{n}{k+t} \rightarrow \infty$. В работе имеются неточности, в связи с чем ниже приводится схема полного и исправленного доказательства.

Производящая функция по n для чисел $\frac{S(n, k, +)}{n!}$ есть

$$\varphi_k(x) = \frac{e^{x+}(e^x-1)^k}{k!}$$

Отсюда по формуле Коши

$$S(n, k, +) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{\varphi_k(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{n!}{k! 2\pi i} \oint \frac{e^{z+}(e^z-1)^k}{z^{n+1}} dz.$$

где интеграл берется по некоторой окружности с центром в нуле. Далее будет применяться метод перевала в той форме, как это изложено в [2].

Произведем замену переменных $z = re^{i\varphi}$, обозначим

$$e^{\frac{+}{k}z}(e^z-1)^k = f(z),$$

$$S(n, k, +) = \frac{n!}{k! 2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi})|^k e^{-ni\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{n!}{k! 2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ni\varphi + k \ln f(re^{i\varphi})} d\varphi.$$

Разложим $\ln f(re^{i\varphi})$ в ряд Маклорена по $i\varphi$; обозначим

$$k_s = k_s(r) = \frac{\partial^s}{\partial u^s} \ln f(re^u) \Big|_{u=0}, \quad s=0, 1, 2, \dots, \text{ тогда}$$

$$S(n, k, +) = \frac{n!}{k! 2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{k \ln f(r) + i\varphi(-l + k k_1) + \frac{(i\varphi)^2}{2!} k k_2 + \dots} d\varphi.$$

Учитывая это, предположим теперь, что r выбрана таким образом, что $-n+kk_1=0$ Тогда

$$S(n, k, t) = \frac{n! e^{rt} (e^r - 1)^k}{k! 2\pi r^n \sqrt{kk_2}} \int_{-\pi\sqrt{kk_2}}^{\pi\sqrt{kk_2}} e^{-\frac{\varphi^2}{2!}}$$

$$\exp\left(\sum_{s=2}^{\infty} (-1)^s \frac{\varphi^{2s} \cdot k \cdot k_{2s}}{(2s)!(kk_2)^s}\right) \cos\left(\sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\varphi^{2s+1} \cdot k \cdot k_{2s+1}}{(2s+1)!(kk_2)^{s+\frac{1}{2}}}\right) d\varphi,$$

Предположим, что $\frac{n}{k+t} \rightarrow \infty$. Обозначим $\alpha = \frac{n}{k}$, $c = 1 + \frac{t}{k}$,

$b = \frac{\alpha}{c} = \frac{n}{k+t}$ и найдем решение уравнений для r , которое теперь представляется в виде $r = b(1+u)$, где $u = \frac{1}{1-c+ce^{b(1+u)}}$.

Нас интересуют решения последнего уравнения удовлетворяющие условию $-1 < u < 0$. Решения метода итераций с начальной точки

$u=0$ получаем: $u = -\frac{e^{-b}}{c} \left[1 + \left(1 + \frac{b}{c}\right) e^{-b+o(1)} \right]$, откуда

$$r = -\frac{\alpha}{c} \left[1 - \frac{e^{-\frac{\alpha}{c}}}{c} - \left(1 - \frac{\alpha}{c^2}\right) \frac{e^{-\frac{\alpha}{c^2}}}{c} (1+o(1)) \right] = \frac{\alpha}{c} (1+\xi).$$

В последнем выражении для $S(n, k, t)$ разложим в ряд выражения $\exp\{\dots\}$ и $\cos\{\dots\}$ по степеням $1/k_r$, учитывая соотношение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{2n} dx = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1), \quad n > 0$$

переходим к

$$S(n, k, +) = \frac{n! e^{r+} (e^r - 1)^k}{k! r^n \sqrt{2\pi k k_2}} \left[1 + \frac{g_1}{kr} + \frac{g_2}{(kr)^2} + \dots \right], \text{ где}$$

$$g_1 = \frac{r}{24} \left(3 \frac{k_4}{k_2^2} - 5 \frac{k_3^2}{k_2^3} \right),$$

$$g_2 = \frac{r^2}{1152} \left(168 \frac{k_3 k_5}{k_2^4} + 385 \frac{k_3^4}{k_2^6} - 630 \frac{k_3^2 k_4}{k_2^5} - 24 \frac{k_6}{k_2^3} + 105 \frac{k_4^2}{k_2^4} \right).$$

Далее имеем $k_s = r(1 + \frac{k}{+}) + o(1) = \alpha + o(1)$, ПОЭТОМУ

$$\frac{g_1}{r} = o(1), \frac{g_2}{r^2} = o(1), n! \sim n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n}, \sqrt{2\pi k k_2} \sim \sqrt{2\pi n},$$

$$e^{(k++)r} = e^{n(1+\xi)}, r^n = \frac{n^n}{(k++)^n} (1+\xi)^n.$$

$$\text{Рассмотрим выражение} \quad \eta = \frac{e^{n\xi} \left(\frac{1 - e^{-\alpha/c(1+\xi)}}{1 - e^{-\alpha/c}} \right)}{(1+\xi)^n} \quad \text{В СВЯЗИ С}$$

$$\text{тем, что } n \cdot \frac{(k++)^n}{k!} \left(1 - e^{-\frac{n}{k++}} \right)^k \sim S(n, k, +) \quad \text{при } \frac{n}{k++} \rightarrow \infty.$$

$$\text{Очевидно, что } \xi < 0, \xi \rightarrow 0 \quad \text{и что } \xi \sim -\frac{k}{k++} e^{-\frac{n}{k++}} \text{ с } \frac{n}{k++} \rightarrow \infty.$$

Кроме того, при этом $\xi \cdot \frac{\alpha}{c} \rightarrow 0$ и поэтому справедливо

$$1 \leq e^{-\xi \cdot \frac{\alpha}{c}} \leq 1 - \xi \cdot \frac{\alpha}{c}.$$

Далее,

$$1 \geq \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{k+t}} e^{-\xi \frac{\alpha}{c}}}{1 - e^{-\frac{n}{k+t}}} \right)^k \geq \left(1 + \frac{e^{-\frac{n}{k+t}} \cdot \xi \frac{n}{k+t}}{1 - e^{-\frac{n}{k+t}}} \right)^k = a(n, k, t).$$

Если предположить, что $\frac{nk^2}{(k+t)^2} \cdot e^{-2\frac{n}{k+t}} \rightarrow 0$ с $\frac{n}{k+t} \rightarrow \infty$, то $a(n, k, t) \sim 1$, $(1+\xi)^n \sim e^{\xi n}$, следовательно, $\eta \sim 1$ при этом.

Таким образом, если $\frac{n}{k+t} \rightarrow \infty$ и $\frac{nk^2}{(k+t)^2} e^{-2\frac{n}{k+t}} \rightarrow 0$, то для обобщенных чисел Стирлинга второго рода справедливо следующее асимптотическое соотношение:

$$S(n, k, t) \sim \frac{(k+t)^n}{k!} 1 - e^{-\frac{n}{k+t}}.$$

S u m m a r y

On the minimization of weakly-defined boolean functions' systems

It's proved that minimization of almost all weakly defined boolean functions systems is not simpler than the minimization of individual functions. Obtained some estimations of complexity of the reduced disjunctive normal forms of weakly defined boolean functions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Медведев Ю.И., Ивченко Г.И.: Асимптотическое представление конечных разностей от степенной функции в произвольной точке. Теор. Вер. и ее Прим., 1965, т. X., стр.151-156.
2. Good I.J.: Saddle-point methods for multimial distribution, Ann. Math., 1957, 28, 4, 861-881.

ГЕНЕРАЦИЯ ТЕСТОВ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ БЛОКОВ,
СОСТОЯЩИХ ИЗ СИС И БИС

К. Пасторне-Варга, М. Ужоки

Исследовательский институт вычислительной техники и
автоматизации ВАН, Будапешт

СЛЕДСТВИЯ ИЗ-ЗА КОМПЛЕКТНОСТИ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ:

- 1/ Классические методы генерации тестов для полной системы не применимы.
- 2/ Модель ошибки типа константа 0,1 в крайнем случае имеет смысл для первичных входов, если неизвестна действительная структура системы.
- 3/ Проверка системы с помощью тестов эквивалентно верификации выполнения функций, ожидаемых от системы.
- 4/ Вместо модели ошибки, предложение ошибки, что означает некоторые отклонения от ожидаемой функции. Целесообразно, чтобы предложение ошибки включило бы в себя все существенно возможные ошибки. Предложение ошибки можно пропустить, если практическое решение верификации, написанной в пункте 3, возможно.
- 5/ Иерархическая организация генерации тестов оказывается выходом из положения, которую в дальнейшем будем называть модульным подходом, так как элементы системы мы называли модулями. [4, 5]
- 6/ Генерация тестов и предложение ошибок нужно растолковать для модулей. Сказанные в пункте 2-4 в общем останутся в силу, но в простейших случаях к классическим ситуациям.
- 7/ Описание модуля нужно сформулировать так, чтобы оно содержало бы необходимую информацию тактики тестирования.
- 8/ Модульная структура системы, дающая описание функционирования системы, должна быть применима для управления генерацией тестов.

МОДУЛЬ

Цифровые системы, построенные из одной или нескольких схем МИС, СИС, БИС будем называть *модулями*.

Математическая модель модуля - автомат, имеющий n входов, m состояний и k выходов ($n, m, k \geq 1$).

На основании этого определения:

- модулем может быть комбинационная схема, описываемая системой булевых функций, следовательно и вентиль;
- модулем может быть последовательная сеть, описываемая конечными автоматами. При соответствующем задании описания достижимо, чтобы стали бы моделируемыми синхронные, асинхронные и автономные последовательные сети;
- суперпозиция модулей также модуль;
- подавтомат системы считается модулем;
- из-за замкнутости суперпозиции, систему также можно считать модулем.

Информация, описывающая модуль:

- задает функциональное поведение модуля;
- содержит необходимые данные для проверки модуля с помощью тестов и установления тестируемости. Это по существу необходимая информация для выбора теста или последовательности тестов из очередно предложенных и для тактики тестирования.

ОПИСАНИЕ МОДУЛЯ

Не предположено единого описания. Требование к описанию, чтобы на его основании возможно было бы получить ответ на следующие вопросы:

а/ Какова функция модуля?

Ответ может быть задан на основе описания функционирования или симуляции модуля.

б/ Можно ли считать модуль исправным?

Ответ вырабатывается автоматом-акцептантом модуля. Вместо модели ошибки мы описываем функционально работоспособность модуля с помощью автомата-акцептанта, который переходит в свое конечное состояние, если на основе поданной наблюдаемой входной последовательности и выходных ответов модуля функционирование модуля практически можно считать правильным. Автомат-акцептант производим на базе предположения ошибок или обеспечения правильности функционирования.

в/ Каков поочередно предложенный тест?

На основании внутренних состояний автомата-оригинала и автомата-акцептанта описание определяет очередную входную последовательность, ценную с точки зрения испытания модуля.

г/ Какой очередной тест применим в данной ситуации?

Учитывая частично фиксированные входные и выходные переменные модуля, описанием задается возможно полная входная и выходная комбинация, способная по возможности для тестирования.

АВТОМАТ-АКЦЕПТАНТ МОДУЛЯ

Техническое содержание автомата-акцептанта тоже самое, что и функционального описания. Он имеет двоичный вход и выход.

Акцептируются те входы, которые тестируются. Автомат-акцептант переходит в конечное состояние в случае тестированности модуля. Состояния автомата-акцептанта составляют полуупорядоченное множество последовательности по отношению упорядочения. Принятие последовательности тестов означает продвижение /вперед/

по упорядочению в отношении текущего состояния автомата.

СТРАТЕГИЯ ГЕНЕРАЦИИ ТЕСТОВ ДЛЯ ВЫСОКОСЛОЖНЫХ СЕТЕЙ ПРИ ВЕНТИЛЬНО-УРОВНЕВОМ ПОДХОДЕ

Пусть обозначим через N_G число вентилях в сети, а через $N_{I/O}$ сумму числа входов и выходов.

Сети называются высокосложными, если

$$N_G \geq 10000 \quad N_G/N_{I/O} \geq 100$$

Это грубо говоря означает то, что по одному сигналу пути расположено многочисленное количество вентилях. Следовательно, входная комбинация может обнаруживать много ошибок относящихся к разным вентилям. Итак, очевидно, что в начале процесса тестирования целесообразно применять средства иные, чем в его завершающей фазе, когда уже малочисленное количество конкретных тестов отсутствуют. Соответственно этому, в общем, генерация тестов разделяется на две части.

1. Регистрация обнаруженных ошибок с помощью заданных /детерминистически, случайно или вручную/ входных последовательностей. Средство - симулятор ошибок.
2. Одиночная или конкретная генерация тестов для ошибок, обнаруженных тестами, упомянутых в пункте 1. Здесь задача двойная:
 - а/ определение первичных входов, обеспечивающих тестовую комбинацию на входе неисправного элемента /установка теста/;
 - б/ обеспечение распространения действия ошибки на какой-то первичный выход. Это, процесс отыскивания чувствительных путей, для которого известен ряд алгебраических методов.

В этой фазе генерации тестов нужно решать и регистрацию всех обнаруженных ошибок.

ЗАМЕЧАНИЕ:

В фазе 1 генерации тестов целесообразно отыскать по поведению сети "эффективные" входные последовательности. Например, в случае комбинационной сети, определение такой входной последовательности, для которой булева производная функции по многим переменным принимает значение единицы. Конечно нужен компромисс между затратой времени для эффективности входной последовательности и числом обнаруженных ошибок. В том случае, если эффективность независимо от структуры сети сгенерированных тестов снизится, то нужно перейти к генерации тестов, ориентированной на конкретные ошибки.

Пропорция между общей и конкретной генерацией тестов зависит от выбранного общего метода, что в крайнем случае может быть и генерация псевдо-случайных последовательностей.

Возможная стратегия генерации тестов, ориентированная на конкретные ошибки, начинать от испытанного вентиля, ближайшего к выходу системы. Возможный алгоритм для решения этой задачи:

- 1/ Выбрать неиспользованный вентиль, ближайший к первичному выходу системы.
- 2/ Задаваться еще неприменимыми тестами вентиля. Определить те первичные входные комбинации, которые устанавливают эти тесты на входах вентиля и обеспечивают чувствительный путь между выходами вентиля и системы.
- 3/ Регистрация обнаруженных этими тестами ошибок в сети. Если в сети еще имеются необнаруженные ошибки, то возврат к пункту 1.
- 4/ Конец процедуры.

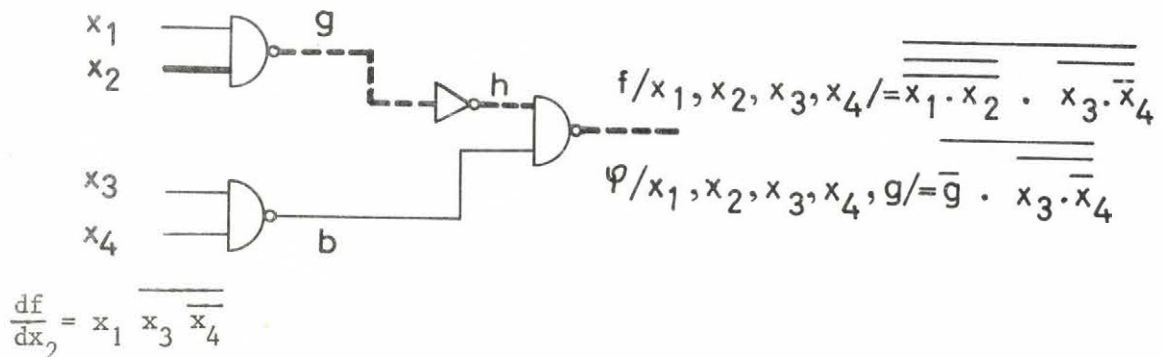
ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТЕСТОВ В СЛУЧАЕ МОДУЛЬНОГО ПОДХОДА

Игнорирование вентильного уровня означает то, что в системе за-
вершающиеся процессы могут быть восприняты только через моду-
ли. Для модулей задаемся функциональными описаниями, следова-
тельно внутреннее /вентильно-уровневое/ построение неизвестно,
поэтому вместо понятия привычной модели ошибок /константа 0 и
1/ ошибками могут являться отклонения от заданного функциониро-
вания. Так как основа указанных отклонений не известна, то
естественно надо стараться за основу принять правильное функ-
циональное решение.

Очевидно, что при классических методах, возникающие проблемы и
понятия должны быть переоценены.

Одна из задач классической генерации тестов обеспечение "чув-
ствительных путей". Эта задача при модульном подходе в боль-
шинстве случаев нерешена. Техника чувствительных путей проста
в том случае, если нет разветвления путей 1. При этом усло-
вие чувствительности пути может быть задано с помощью булевой
произвольной. Например, на рисунке 1 условие $\frac{df}{dx_2} = 1$ обеспечи-
вает чувствительный путь от x_2 до f , подобно $\frac{d\varphi}{dg} = 1$ от g до φ
при

$$(f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, g))$$



по правилу цепочки

$$\frac{df}{dh} \cdot \frac{dh}{dg} \cdot \frac{dg}{dx_2} = b \cdot 1 \cdot x_1 = \overline{x_1 \cdot x_3 \cdot x_4} \quad \frac{d\varphi}{dg} = \overline{x_3 \cdot x_4}$$

Рис. 1.

В случае разветвляющихся путей обобщением булевой производной [2] в принципе может быть задано условие чувствительности путей. Поэтому, если в реализации функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, на начало разветвляющихся путей g , число ветвей k и выходы вентиля, находящихся в ветвях g_1, g_2, \dots, g_k /рис. 2./, то по [2] может быть определена входная комбинация, обеспечивающая чувствительность путей

$$\frac{df}{dg} = \sum_{i=1}^k \frac{df}{dg_i} \cdot \frac{dg_i}{dg} + \sum_{\substack{i, j \in I \\ i \neq j}} \frac{d^2 f}{dg_i dg_j} \cdot \frac{dg_i}{dg} \cdot \frac{dg_j}{dg} + \dots +$$

$$+ \frac{d^k f}{dg_1 dg_2 \dots dg_k} \cdot \prod_{i=1}^k \frac{dg_i}{dg}$$

при $(I = \{1, 2, \dots, k\})$

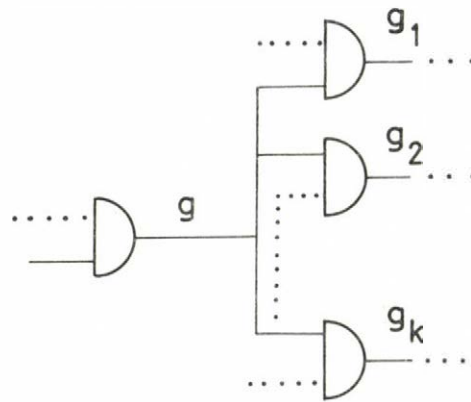


Рис. 2.

Такое решение при модульном подходе, когда каждый модуль с несколькими выходами может быть началом разветвления, кроме того любой выход модуля также может быть началом разветвления не только трудное, но и теоретически не обосновано. Поэтому применение алгоритмов, обоснованных на методе чувствительных путей для модульного подхода возможно только тогда, когда неестественное ограничение накладываем на модуль, а именно, он может иметь только один выход.

При проектировании тестов, основанном на модульном подходе разрешимы такие проблемы удовлетворительной эффективностью с точки зрения практики, для которых наблюдение за работой модулей может получить достаточную информацию.

Из этого следует, что /см. рис. 3./

- Вообще говоря, тестирование методом определения "*чувствительных путей*" не разрешимо. Считается целесообразным ввести понятие "*наблюдаемости*", что означает следующее, в заданном состоянии системы модуль наблюдаем, если выход системы зависит от выходов модуля. Очевидно, что в случае одновыходных модулей эти два понятия совпадают.
- Переносится понятие установки теста.
- В отношении теста вентиля "*тест модуля*" имеет новый смысл, так как требуются тесты или тестовые последовательности для доказательства правильности функционирования модуля.
- Симуляция ошибок означает, что автоматы-акцептанты модулей работают по наблюдаемости.

В ходе проектирования тестов основные средства наблюдаемости и установка теста.

вентильный уровень	модульный уровень
симуляция ошибок	наблюдаемость
чувствительность путей	
установка теста	установка теста
тест	верификация

Рис. 3.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТЕСТОВ

Из вышесказанного следует, что средства проектирования тестов, установка теста и особенно верификация наблюдаемости содержат

много опытных элементов, поэтому их эффективность заранее не оценима. С этими двумя средствами выполнимые рабочие процессы:

- Определение "способности обнаружения ошибки" заданной входной последовательности. Это всегда возможно по переходам состояний в конечное состояние автомата-акцептанта модулей.
- Установка заданной входной комбинации для модуля.
- Установление наблюдаемости модуля при одиночном проектировании тестов, также как в случае заранее заданной входной последовательности. При одиночном проектировании тестов после установки теста нужно еще решить, что данный модуль стал ли наблюдаемым. Установление наблюдаемости не конструктивное действие, а устанавливается как следствие.

Из-за трудоемкости одиночной установки теста целесообразно ее избежать в ходе проектирования тестов до тех пор, пока возможно любым путем, для полной системы, эффективно сгенерировать тесты. В алгоритме проектирования тестов регистрация наблюдаемости играет важнейшую роль, потому что с ее помощью получим ответ на тестируемость системы и на его основании решается дальнейший ход проектирования тестов.

Проектирование тестов разделяется на две задачи:

1. Выработка входных комбинаций.
2. Регистрация наблюдаемости.

Определение входных комбинаций может быть осуществлено несколькими способами. Какой из них выбирается для алгоритма проектирования тестов решается на основе информации, полученных при регистрации наблюдаемости. Из способов определения входных комбинаций важнейшие:

- интерактивное задание;
- задание псевдо-случайных входных комбинаций;

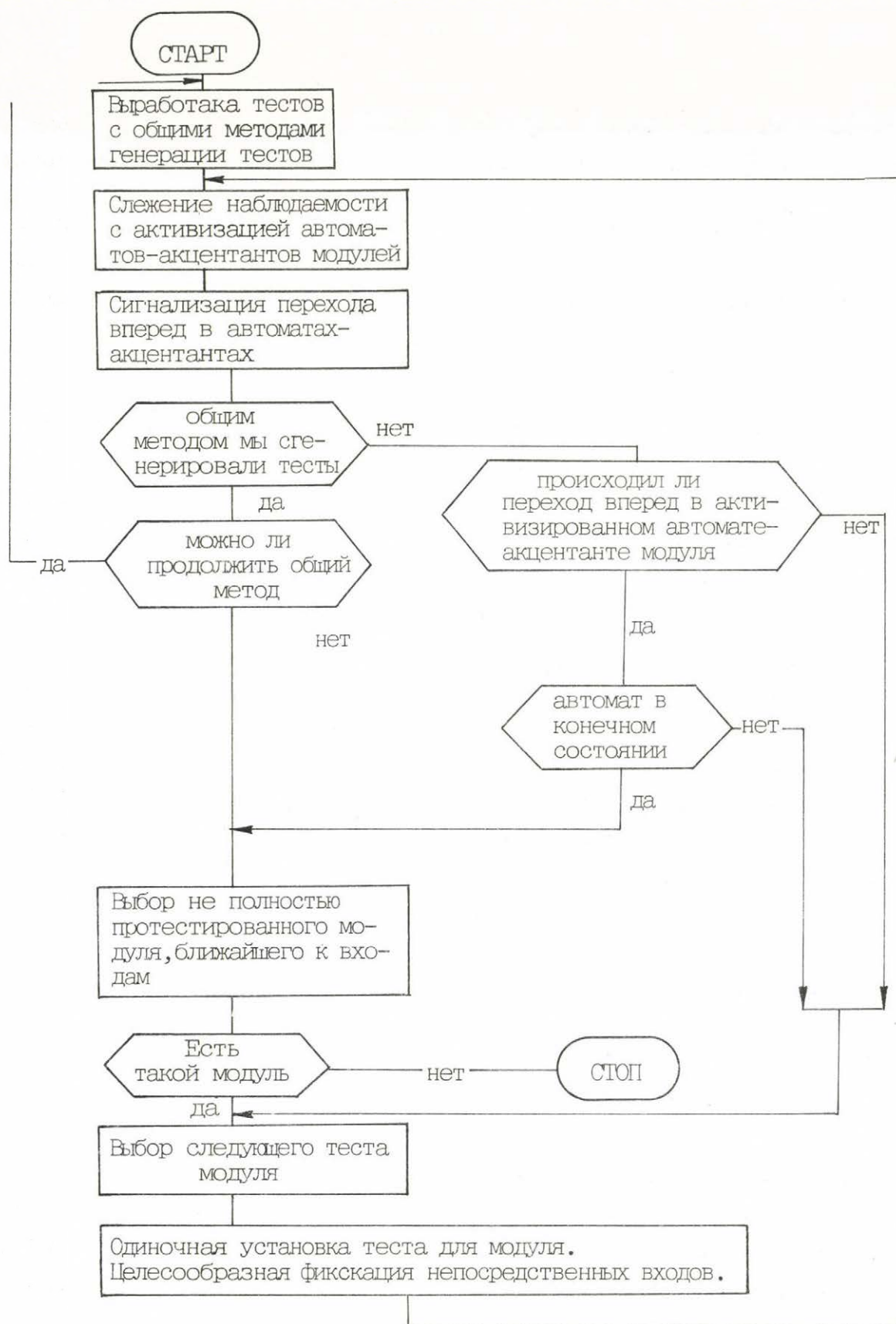


Рис. 4.

- задание входных комбинаций, содержащих "чувствительные" входы;
- одиночная установка теста для заданного модуля.

Скелет проектирования тестов приведен на следующей принципиальной схеме: /см. рис. 4./

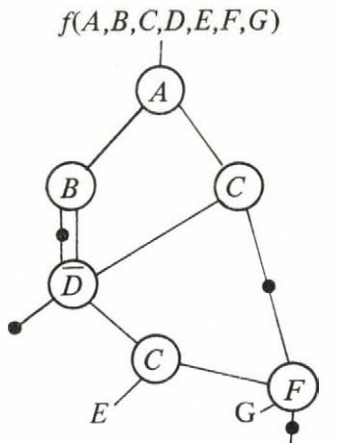
ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной целью настоящего доклада являлось подумать, что значит с точки зрения тестирования модульных подход. То есть

- в тестировании как преобразуются привычные понятия. Из них существенное: переоценка понятий модели ошибок и ошибки;
- каков характер потери информации вследствие модульного подхода;
- вместо сложных или невозможно точных решений, какие экспериментальные решения применимы;
- какие стратегии проектирования тестов и в ней применение каких средств возможны.

Мы должны заметить, что здесь написанная стратегия проектирования тестов включает в себя классические методы, если модулем является вентиль и если предположение ошибки традиционное.

Иллюстрация для описания модуля и автомата-акцентанта.



АВТОМАТ-АКЦЕНТАНТ

	A	B	C	D	E	F	G	f
1.	0	B	x	1	x	x	x	B
2.	0	B	0	0	E	x	x	B + E
3.	0	B	1	0	x	F	G	B + F + G
4.	1	x	0	1	x	x	x	1
5.	1	x	0	0	E	x	x	E
6.	1	x	1	x	x	F	G	F + G

$$\mathfrak{A} = (A, X, Y, a_0, a_k, \delta, \lambda)$$

$$I = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$Y = 0, 1, 2$$

$A = I$ множество всех подмножеств

$a_0 =$ полное множество I

$a_k = \emptyset$ пустое множество

$a \in A$ собственное подмножество I

$\underline{x} \in X$ вектор, совместимый каким то элементом I

\underline{x}^* обозначение совместимого с I элемента \underline{x}

$$\delta(a, \underline{x}) = \begin{cases} a \setminus \underline{x}^* & \text{если модуль наблюдаемый} \\ a & \text{если модуль ненаблюдаемый} \end{cases}$$

$$\lambda(a, \underline{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если нет изменения состояний} \\ 1, & \text{если есть изменение состояний} \\ 2, & \text{если } \delta(a, \underline{x}) = a_k \end{cases}$$

Summary

The paper treats some problems connected with the sensitive paths and with path sensitisation and the condition of the observability of faults, in case of circuits with MSI and LSI elements.

A new approach of design of tests is treated.

Uniforms model of fault and uniform description for the moduls of the circuits is not required. Instead of these an automaton is defined for every modul and these are used as acceptors.

ЛИТЕРАТУРА

1. D.B. Armstrong: On finding a nearly minimal set of fault detection test for combinational logic nets, IEEE Trans. Electron. Comput., vol. EC-15, pp. 66-73, Feb. 1966.
2. A.C.L. Chiang, I.S. Reed, A.V. Banes: Path Sensitization, Partial Boolean Difference, and Automated Fault Diagnosis, IEEE Transactions on Computers, February 1972.*
3. B. Akers: Functional testing with binary decision diagrams, FTCS-8, Toulouse, June 21-23, 1978.
4. R.G. Bennetts, D.C. Brittle, A.C. Prior, J.L. Washington: A modular approach to test sequence generation for large digital networks, Digital Processes, 1 1975 3-24.
5. D.C. Brittle: A notation describing the fault-related behaviour of logic modules, IEE Electronics Lett., Vol. 10. No. 11., 1974, pp. 215-216.



ВОЗМОЖНЫЙ ПОДХОД К ПРОВЕРКЕ ПОЛНОТЫ ТЕСТА

К. Пасторне-Варга, М. Ужоки

Исследовательский институт вычислительной техники
и автоматизации Венгерской Академии наук

В проектировании и изготовлении цифровых устройств с помощью вычислительной техники есть две важные области - это конструирование, особенно проектирование печатных плат, и проверка и генерирование тестов. Результаты родились, в первую очередь, в области конструирования. В области проектирования тестов результаты скромнее и в общем относятся к специальным узлам /комбинаторным, синхронно-последовательным, описанным на уровне вентилей/. В большинстве этих специальных случаев известны точные методы для создания полных тестов определения ошибок по модели ошибок /квалификационные тесты/, более того, в отдельных случаях - определения и места ошибок с помощью диагностических тестов [4, 5, 6, 11, 12].

И если конструирование играет роль только в начале производства, тест - на протяжении всего процесса производства. Поэтому качество теста /его полнота/ определено один из важных факторов результативности производственного процесса.

Вследствие быстрого развития набора электронных узлов трудности проектирования теста и его необходимость растут в одинаковой мере.

Из-за увеличения интеграции электронных узлов классическое определение - вентильное описание /если вообще возможно/ и ошибки типа замыкания как модель ошибок ведут к комбинаторному взрыву, поэтому в случае появления БИС и СИС удара делается на функциональный тест [9] и так как теряется ранее определенный смысл модели ошибок, невозможно избежать нового формулиро-

вания гипотез ошибок [1].

В этом состязании необходимости и трудностей настоящая статья представляет метод проверки полноты серии тестов, разработанных на вычислительной машине или вручную. Этот метод проверки полноты теста предоставляет только один необходимый критерий, итак, результат скромный, но и требует малого использования вычислительной машины. Во время проектирования серии тестов метод может быть использован повторно. Пригодность метода мы видим, в первую очередь, в том, что он хорошо дополняет процессы симуляции ошибок, которые способны контролировать полноту тестов. В случае симуляции ошибок одним или несколькими тестами подробно исследуется влияние одной или нескольких ошибок, а нижеописываемый метод дает беглый обзор серии тестов и всей сети.

1. Одно разбиение процесса тестирования

Как известно, проблема тестирования заключается в следующем. Задана схема, которая реализуется булевой функцией $f \in F$. Задано множество функций - возможных ошибок $H \subseteq F^{1/}$. Задача теста заключается в том, чтобы дать необходимые и достаточные условия для того, чтобы схема реализовалась в функцию $f_x \notin H$.

Пусть X_1, X_2, \dots, X_n переменные булевой функции и входные переменные соответственной схемы. При конкретных значениях переменных $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ f характеризуется значением $f(\underline{\alpha})$. Поэтому комбинация значений $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ разделяет по значениям n -переменную область булевых функций на две части $g(\underline{\alpha}), g \in F$. Множество комбинаций значений T и булевая функция f также делят F на две дизъюнктные части следующим образом:

^{1/} Функция ошибки, обычно, - это булевая функция $h \neq f$, реализуемая через схему, полученную из ошибочной первоначальной схемы.

$$Q \cup R = F, \quad f \in Q, \quad \text{где}$$

$$\forall g \forall \alpha (((\alpha \in T \ \& \ g(\alpha) = f(\alpha)) \rightarrow g \in Q) \text{ и}$$

$$\forall g \forall \alpha (((\alpha \in T \ \& \ g(\alpha) \neq f(\alpha)) \rightarrow g \in R))$$

Итак, генерирование теста - это создание такого множества комбинаций значений T , для которого $H \subseteq R$ ^{1/}.

Заключительная часть процесса тестирования - это измерения схемы прибором /тестером/ при заданных комбинациях значений $\alpha \in T$. Схему классифицируем ошибочной, если $\exists \alpha (\alpha \in T \ \& \ f_p(\alpha) \neq f(\alpha))$.

Диагностика - поиск места ошибки означает определение входной комбинации /диагностической последовательности/, которая разделяет область функции F на подмножества P_1, P_2, \dots, P_s ($s \geq \|H\| + 1$) таким образом, что $\forall g (g \in P_i \rightarrow \exists h (h \in H \ \& \ g \neq h \ \& \ h \in P_i))$.

Уже процесс генерирования обнаруживающего теста, тем более диагностического, практически становится неразрешимым вследствие сложности схем. Поэтому был разработан такой измерительный прибор, с помощью которого можно выполнять определенные измерения внутри схемы. Таким образом полученная дополнительная информация уменьшает требования к диагностической серии тестов.

Предлагаемое нами разбиение процесса локализации ошибок еще более облегчает выше описанные трудности, поскольку нужен только обнаруживающий ($G\Theta - N\Theta G\Theta$) тест.

^{1/} T привычно называть обнаруживающим тестом ($G\Theta - N\Theta G\Theta$), усторый показывает только, ошибочна схема или нет.

Это разбиение следующее:

1. Проектирование теста - проверка полноты теста.
2. Тестирование.
3. Диагностика /приводя в действие диагностическую станцию [2], многократно применяя обнаруживающие тесты/.

2. Проверка полноты теста

2.1. Достаточные условия полноты теста.

Дана схема C , серия тестов $T = t_1, t_2, \dots, t_m$ и множество или список предполагаемых ошибок $H = h_1, h_2, \dots, h_k$.

Для проверки полноты теста T надо просмотреть, все ли предполагаемые ошибки схемы может определить T тест. То есть, надо решить, действительны ли $\forall i \exists j (t_j \text{ определяет } h_i)$. Если не полный, то результатом процесса проверки полноты будет список ошибок, которые не обнаруживаются с помощью теста T .

Из литературы известны такие методы, которые способны разрешить вышеописанную задачу. Такие, например, параллельные [3, 4] или дедуктивные симуляции ошибок [5, 6, 7].

Параллельный и дедуктивный симуляторы ошибок готовились для моделирования сетей, описанных на уровне вентилей, с предположением 0-1 ошибок типа замыкания. Как известно, существующая сложность схем и описание доступных ее элементов делают невозможным описание на уровне вентилей. Так сначала было создано описание схем на уровне модулей и моделирование модулей на уровне вентилей [8, 10], затем функциональное моделирование модулей и вместо потерявшего смысл предположения о 0-1 ошибке типа замыкания возникло предположение об индивидуальных ошибках, а также возникла проверка функциональной верности [9]. Поэтому для того чтобы можно было бы применять оба способа мо-

делирования ошибок, надо бы определить формулировку отрицания функциональной верности в форме предположения ошибок. Кроме этого при параллельном моделировании ошибок надо бы найти также способ введения ошибок. Для того же чтобы можно было бы применять дедуктивное моделирование ошибок надо бы оформить передачу списка ошибок.

Предлагаемое нами решение задачи ближе к методу дедуктивного моделирования. Предположим, что схема описана на модульном уровне. Основное отличие от известных методов состоит в том, что мы не ищем ошибку, а хотим подтвердить правильную работу схему. Отсюда следует, что на основе какой-то модели ошибок предполагаемые ошибки не ставятся в соответствие с проверяемым элементом, а в соответствие ставится такой принимающий автомат, который тогда переходит в конечное состояние, когда соответственный модуль получает все такие входы, на которых в случае верной реакции модуль рассматривается функционально правильным. Каждому модулю в соответствие ставится принимающий автомат /рис. 1./ [1]. Моделируем безошибочную сеть и одновременно пускаем в действие принимающий автомат таким образом, что для каждого принимающего автомата соответствующий вход принимает только тогда, если действие выхода, относящегося к нему модуля, выходит на первоначальный выход. Проверенный тест только тогда полный, если при его использовании принимающий автомат каждого модуля переходит в конечное состояние.

Надо заметить, что расчет "чувствительных" путей, обеспечивающих попадание действия выходов отдельных модулей на первичный выход, сталкивается с определенными трудностями, поэтому во время моделирования действие выхода надо устанавливать опытным путем [1].

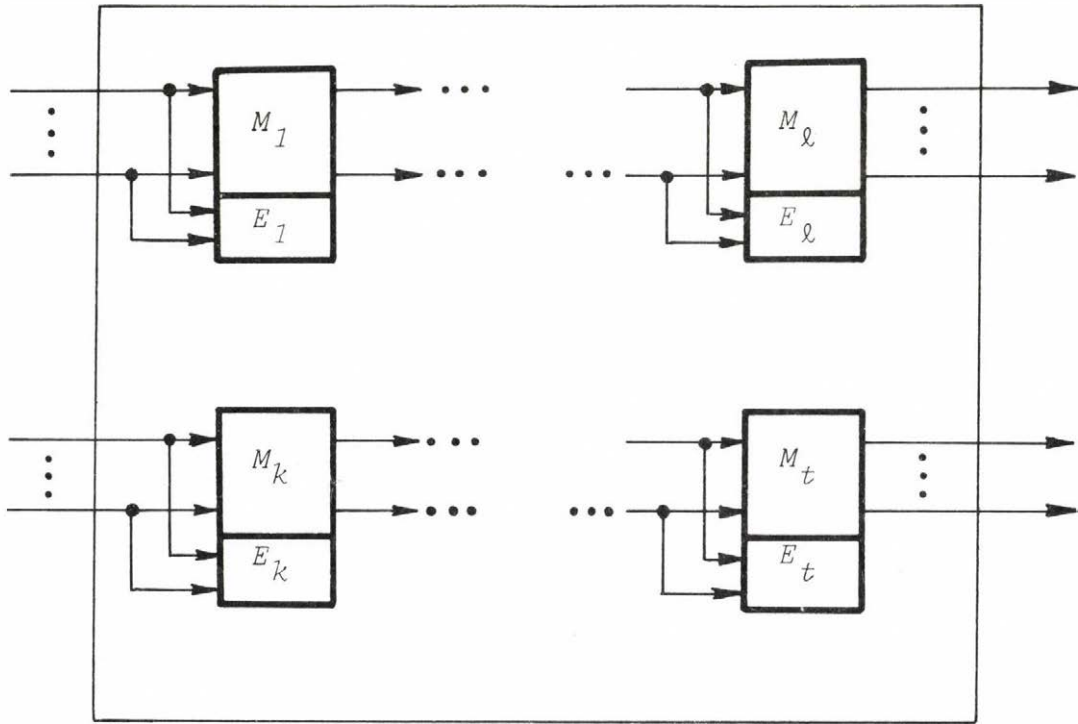


Рис. 1.

Как отмечалось в предыдущем пункте, полный тест, если обеспечено многократное использование - воспроизводимость, достаточно для того, чтобы "диагностическая станция" [2] могла бы локализовать каждую ошибку.

2.2. Необходимость условия полноты теста

Назовем тест слабой полноты, если во время его применения для моделирования узлов по их описанию узловые единицы /модули/

получают свои собственные полные тесты.

Это значит, что при подтверждении слабой полноты теста принимающий автомат модуля во время моделирования всегда действует, если получает данный вход, независимо от того, попадает ли на первичный выход или нет действие выходов соответственного модуля. Ясно, что слабая полнота является необходимым условием полноты теста. Именно поэтому в процессе, проверяющем полноту теста, сначала целесообразно, как первая фаза, проверять существование слабой полноты и выполнять сложные проверочные расчеты полноты такого теста, который уже отвечает необходимым условиям.

Замечание. Методы "диагностической станции" дают возможность диагностировать логическую сеть с помощью теста слабой полноты, если на основе стратегии "диагностической станции" осуществляем определенные изменения.

3. Система программ, проверяющая необходимые условия полноты теста.

Части программной системы [10, 11] :

- симулятор правильной сети;
- анализатор результата;
- управление принимающим автоматом.

Симулятор во время работы в различные моменты времени задает комбинации входа-выхода, поступающие на отдельные модули.

Анализирующая часть выбирает на данный модуль необходимые для теста входные и выходные переменные и во время обработки по

мере анализа переменных по желанию сжимает^{1/} полученную информацию в хронологическом порядке или оставляет ее без изменения.

Управление принимающим автоматом выбирает принимающий автомат для данного модуля из каталога и заставляет его работать со сжатой или неизменной входной комбинацией. В конце процесса программа сигнализирует, прибыл ли на соответствующий модуль полный тест, т.е. попал ли в конечное состояние принимающий автомат. Если это не так, то выдается информация о недостающих тестах и/или ошибке, не определяемой на основе данного теста или модуля.

Замечание. Принимающие автоматы удалось организовать так, что они могут работать и в случае последовательного модуля со сжатыми данными без потери информации.

Если к концу программы принимающий автомат каждого модуля находится в конечном состоянии, тогда выполняется необходимое условие полноты серии тестов, используемых в моделировании.

Необходимое место для программы не больше, чем требуется для симулятора.

Требующиеся операции для анализатора результата и управляющей программы принимающим автоматом $s \leq k \cdot A \cdot n$, где k - число проверяемых модулей, n - число элементов, содержащихся в списке результатов моделирования, A - же константа, зависящая от сложности принимающего автомата.

^{1/} Пусть Y_1, Y_2, \dots, Y_ℓ выбранные переменные. К комбинации значений этих переменных поставим в соответствие конъюнкцию $Y_1^{\beta_1} Y_2^{\beta_2} \dots Y_\ell^{\beta_\ell}$. Под сжатием информации подразумевается составление в избыточной нормальной форме функции, установленной дизъюнкцией конъюнкций, определенной на комбинации значений $\beta_{1,i}, \beta_{2,i}, \dots, \beta_{\ell,i}$ ($i=1, 2, \dots$), полученных во время симуляции.

S U M M A R Y

A method is given to a global examination of a given test sequence. This method decided whether the necessary condition of completeness of test sequence is valid.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. К. Пасторне-Варга, М.Ужоки: Генерация тестов для функциональных блоков, состоящих из СИС и БИС. В данном сборнике.
2. Л. Мате, Й. Эсенски,: Диагностическая станция. В данном сборнике.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ОШИБОК БЕЗ ЛОКАЛИЗИРУЮЩИХ ТЕСТОВ

Л. Мате, Й. Эсенски, К. Полачек, Й. Ревецки,
Е. Штраус, Д. Турчани

1. Введение

Основная разница между проверкой узлов и локализацией ошибок состоит в различной разрешающей способности этих двух задач:

- проверка выявляет только работоспособность проверяемого узла ПУ, а
- локализация определяет ту деталь, которая является причиной ошибочного действия узла.

Увеличение разрешающей способности проверяющей тестовой последовательности возможно достичь способами:

- дополнением ее последовательностью локализирующих тестов, или
- расширением круга точек /включая и внутренние точки ПУ/ измерения.

Избранный нами метод использует второй способ, потому что наши исследования подтвердили, что этот способ более эффективный и экономичный.

Важнейшие аргументы за принятие этого решения:

- не требуется разработка локализирующих последовательностей;
- задачу можно решить на малых ЭВМ, нет необходимости в использовании драгоценного времени больших ЭВМ;
- разрешающая способность проверяющих тестов, генерированных ручным способом, также можно увеличить до требуемого уровня локализации.

Недостаток данного выбора в том, что необходима разработка специального прибора, так называемого динамического зонда интегральной схемы /ЗИС/ для измерения во внутренних точках ПУ, и в процессе локализации требуется специальная информация, определяющая текущую позицию ЗИС на ПУ.

2. Увеличение разрешающей способности теста расширением круга точек измерения

Имеется проверяющая тестовая последовательность

$$T = \{T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_n\}$$

для данного проверяемого узла ПУ. Предполагается, что при выполнении i -ого теста последовательности тестер получит неправильный ответ на первичных выходах ПУ. Естественно, что в ПУ должна быть хотя бы одна неисправность, которую обнаружила тестовая последовательность T_1, T_2, \dots, T_i и одна /или несколько/ из этих неисправностей вызвала полученный неправильный ответ на первичных выходах ПУ. Если при выполнении тестов T_1, T_2, \dots, T_i измеряются не только первичные выходы ПУ, а также временные характеристики его внутренних сигналов, тогда анализом измеренных значений и логической структуры ПУ, можно определить первичное возникновение неисправности в сети ПУ, таким образом решить задачу диагностики.

Для измерения внутренних сигналов ПУ нужны специальные технические средства. Сколько из внутренних сигналов ПУ измеряется одновременно, это - вопрос практический. Если внутренние сигналы ПУ измеряются только по одному, тогда для локализации нужно повторить тест многократно и при этом возникают следующие недостатки:

- для определения соответственности временных характеристик различных сигналов требуется сложный анализ и достоверность результатов является низкой;
- для локализации разрывов сигналов измерение одной точки по

сигналам недостаточно, а необходимо измерить временную характеристику каждой подключенной точки сигнала.

Для одновременного измерения всех внутренних точек ПУ нужно пользоваться различным полем большого количества измеряющих контактов для каждого различного типа ПУ. Хотя анализ измеренных значений упрощается, технические средства усложняются в большей степени.

Компромиссным решением является рекомендованный нами динамический зонд интегральных схем. Этим прибором одновременно измеряются все выводы одной ИС. До локализации первичных неисправностей повторяющую тестовую последовательность нужно повторять как максимум столько раз, сколько ИС в ПУ. Анализ результатов с точки зрения функционирования измерений ИС прост, и локализация разрывов нуждается только в хранении несколько увеличенного количества информации.

3. Динамический зонд интегральных схем ЗИС

ЗИС является многоканальным прибором, каждое слово которого состоит из двух частей: информационная часть содержит логическое значение каждого вывода измеряемой ИС, а временная часть содержит длину временного интервала с предыдущего до данного измерения. ЗИС работает асинхронным способом. Изменение логического значения какого-либо вывода измеряемой ИС возбуждает регистрацию нового состояния. Таким образом, каждое логическое изменение измеряемой ИС регистрируется вместе с его временными параметрами, кроме динамических гонок быстрее разрешающей способности ЗИС. Быстродействующая память ЗИС состоит из 64 слов, и таким образом, практически все измерения изменяемой ИС, вызванные одним тестом, регистрируются, если в ПУ нет автономных генераторов импульса.

4. Конфигурация технических средств для диагностической станции

Диагностическая станция состоит из трех компонентов:

- ЭВМ типа ЕС 1010 со всеми стандартными внешними устройствами /АЦПУ, НМЛ, ДИСК и т.д./;
- тестер смонтированных печатных плат типа ТЕСТОМАТ-С;
- динамический зонд интегральной схемы ЗИС.

Тестер и ЗИС подключены к ЭВМ через устройство сопряжения типа BSI, между тестером и ЗИС имеется связь синхронизации.

5. Важнейшие алгоритмы диагностической станции

5.1. Диагностическая станция реализует следующий алгоритм:

- а/ проверка ПУ до первой неисправности проверяемой тестовой последовательностью;
- б/ локализация деталей, которые могут быть причинами этой неисправности ПУ;
- в/ исправление локализованных ошибок или замена неработоспособных деталей;
- г/ проверка ПУ до первой неисправности проверяемой тестовой последовательностью;
- д/ если неисправности нет, тогда ПУ работоспособен, а если есть, то процесс повторяется с пункта б/.

5.2. Сама локализация /шаг б/ выполняется по следующему алгоритму:

- а/ сигналы ПУ, у которых на первичных выходах возникли неправильные ответы, оформляют НОС /Набор Ошибок Сигналов/;

- б/ элементы НОС, измеренное значение которых не изменилось в течение выполнения целой тестовой последовательности, считаются подозрительными и получают специальный флаг;
- в/ каждая ИС, которая служит источником элементов НОС, включается в НИОС /Набор Источников Ошибочных Сигналов/;
- г/ одна ИС из элементов НИОС выбирается для измерения ЗИСом по стратегии локализации. Ее типом определяется актуальный пропускающий автомат. Проверяющая тестовая последовательность повторяется. При этом ЗИС измеряет и хранит все изменения на выходах измеряемой ИС;
- д/ анализ информации, хранимой ЗИСом:
 - изменилось ли измеряемое значение на тех выходах ИС, которые принадлежат к подозрительным сигналам НОС. Если ответ да, тогда неисправность - разрыв связи данного сигнала;
 - есть ли противоречие между измеренными ЗИСом значениями на выходах измеряемой ИС и ее логической функцией. Этот вопрос решается актуальным пропускающим автоматом. Если ответ да, тогда ИС неработоспособна;
 - а если оба ответа нет, тогда данная ИС пропускается, она выделяется из НИОС и сигналы, принадлежащие к ее выходам, выделяются из НОС, при этом НОС добавляется сигналом, принадлежащими к входам ИС, и процедура повторяется с шага б/.

5.2. Пропускающие автоматы типа ИС - такие подпрограммы, которые на основе спецификации ИС с заданной проектировщиком разрешающей способностью могут определить, что данная ИС действует несоответственно своей функции, если учитываются и прошлые, а также настоящие ее входы и выходы. Разумеется, что разрешающая способность и сложность пропускающих автоматов на различных точках

ИС разные. Определение разрешающей способности пропускающих автоматов одельных типов ИС – вопрос экономический, но имеется возможность поместить в каталоге для одного и того же типа ИС несколько пропускающих автоматов, отличающихся разрешающей способностью.

6. Программные средства диагностической станции

Все программы диагностической станции написаны в ассемблере и работают под управлением операционной системы IDOS/EC-1010.

Важнейшие программы диагностической станции:

- транслятор языка описания тестовых последовательностей;
- транслятор языка описания логической структуры проверяемого узла;
- транслятор языка описания пропускающих автоматов;
- управляющая программа диагностикой;
- программа генерирования и расширения каталога пропускающих автоматов;
- каталог программ пропускающих автоматов;
- программа распространения ошибок и определения текущей позиции ЗИС;
- программа документирования результатов.

Заключение

Диагностическая станция служит для автоматического выполнения полного контрольного процесса узлов цифровой техники. Локализация неисправностей выполняется с помощью проверяющих тестовых последовательностей и нет необходимости в разработке локализирующих тестов.

S u m m a r y

DIAGNOSTIC STATION

A hardware/software system is proposed for full fault localization in digital electronic units. The main advantage of the system lies upon that fact that it uses only simple GO/NOGO tests instead of complex tests with localizing resolution.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. dr. K. Pásztor-Varga, L.L. Máté: "Some problems of CAD in digital Electronics" in CAD Seminar 1976, pp. 218-277. Budapest.
2. "L135. LSI Board Test System", TERADYNE leaflet.
3. D. Kerestély et. al.: "Real Time Interactive Fault Localization" in Automatic Testing'78, pp. 10-21, Paris, France.

ЧИСЛО ВЕРШИННОГО k -ПОКРЫТИЯ ГРАФА

Гюлумян С.М.

Всюду рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в [1, 2].

В работе усиливается результат [3], обобщается результат [4] и формулируется результат аналогичный [2] на случай покрытия вершины графа k -независимыми подграфами [5].

Пусть $\sigma(G) = \max_{H \subseteq G} \lambda(H)$, где $\lambda(H)$ — реберная связность графа H . Граф $G=(V, X)$ называется k -независимым, если $\sigma(G) < k$. Числом $\gamma_k(G)$, $k \geq 1$, вершинного k -покрытия графа G называется наименьшее число k -независимых подграфов, покрывающих $V(G)$. Очевидно, $\alpha_k(G) = \gamma_k(G)$ при $k=1, 2$.

Граф G назовем $[v, k]$ — критическим, если для любого собственного подграфа $N \subset G$ имеется место $\gamma_k(G) = v > \gamma_k(N)$.

Теорема 1. $\lambda(G) \geq k(v-1)$ для любого $[v, k]$ — критического графа G .

Доказательство. Пусть ребро $x=(vu)$ принадлежит некоторому наименьшему реберному разрезу Y $[v, k]$ — критического графа G и пусть вершины $V(G-x)$ покрыты k -независимыми $v-1$ подграфами G_i , $i \in \overline{1, v-1}$. Покрасим вершины $V(G_i)$ цветом i_k . Покрашенную вершину $v \in V(G_i)$ будем называть i_k — покрашенной. Тогда v и u одноцветны. Предположим, что они оказались t_k — покрашенными. Очевидно удаление наименьшего реберного разреза любого графа делит его на две компоненты. i_k — покрашенные вершины одной из компонент $G-Y$ обозначим через $v^1(G_i)$, а другой — через $v^2(G_i)$. Пусть $v \in v^1(G_{t_1})$, $u \in v^2(G_{t_2})$. Очевидно в результате произвольного соединения $k-1$ ребрами любых двух

k - независимых графов вновь получим k - независимый граф. Поэтому в множестве $Y \setminus \{x\}$ имеются по крайней мере $k-1$ ребер, расположенные в графе G между $V^1(G_t)$ и $V^2(G_t)$, так как в противном случае возврат ребра x означало бы $\gamma_k(G) = v-1$, что не возможно. Таким образом, цвет t_k снабжает Y по крайней мере k ребрами.

Положим в графе $G-x$ имеется некоторое l_k - покрашенное, $l \neq t$, множество вершин. Покажем, что тогда в разрезе Y имеются по крайней мере k ребер, расположенные в G между $V(G_t)$ и $V(G_l)$. Пусть это не так. Тогда после перекраски вершин $V^1(G_t)$ в l_k цвет l_k , а $V^1(G_l)$ в цвет t_k , l_k - и t_k - покрашенные вершины в G окажутся k - независимыми, то есть $\gamma_k(G) = v-1$, что не возможно. Поэтому каждый цвет i_k снабжает Y по крайней мере k ребрами. Всего же цветов $v-1$, следовательно $|Y| = \lambda(G) \geq k(v-1)$. Теорема доказана.

Так как произвольный граф G с числом вершинного k - покрытия $\gamma_k(G) = v$ содержит $[v, k]$ - критический подграф, то очевидно

Следствие 1. $\gamma_k(G) \leq \{(\sigma(G)+1)/k\}$ для любого графа G .

Случай $k=2$ впервые было получено Ликом [4].

В случае же $k=1$ Полесским [3] было доказано, что для любого графа G хроматическое число $\gamma_1(G) \leq \sigma_1(G)+1$, где $\sigma_1(G)$ - величина, равная максимуму по всем смежным вершинам от числа ребер в наименьшем разрезе, разделяющим эти вершины, что является более слабым условием, чем величина $\sigma(G)$, ибо $\sigma(G) \leq \sigma_1(G)$

Следствие 2. $\gamma_1(G) \leq k\gamma_k(G)$ для любого графа G .

Теорема 2. Для существования $[v, k]$ - критического p - вершинного графа необходимо и достаточно существование (v, k) - критического p - вершинного графа.

Необходимость. Пусть существует p -вершинный $[v, k]$ - критический граф. Тогда аналогично доказательству необходимости теоремы 1 [2] можно показать, что $p \geq k(v-1)+1$ и $p \neq k(v-1)+2$. А это, согласно той же теореме, означает, что существует p -вершинный (v, k) - критический граф.

Достаточность. Пусть $v \geq 3$ и существует p -вершинный (v, k) - критический граф. Тогда $p \geq k(v-1)+1$ и $p \neq k(v-1)+2$. Если $p = k(v-1)+1+2t$ ($t=0, 1, 2, \dots$), то рассматриваем граф $G_1 = W^{k(v-1)+2, 2t+3}$, если же $p = k(v-1)+4+2t$ ($t=0, 1, 2, \dots$), то рассматриваем граф $G_2 = G^{k, v, t}$. Пользуясь следствием 2, легко показать, что графы G_1 и G_2 помимо (v, k) - критичности /см. [2] / обладают свойством $\gamma_k(G_i) = \alpha_k(G_i) = ; i=1, 2$. А так как $\gamma_k(G) \leq \alpha_k(G)$ для произвольного графа G , то последнее означает $[v, k]$ - критичность p -вершинного графа G_i .

Пусть теперь $v=2$ и существует p -вершинный $(2, k)$ - критический граф. Тогда $p \geq k+1$, и $\gamma_k(K_{k-2} + C_{p-k+2}) = 2$, причем любой $[2, k]$ - критический подграф графа $K_{k-2} + C_{p-k+2}$ является p -вершинным.

S U M M A R Y

THE NUMBER OF VERTICES k -COVERING OF A GRAPH

The following assumption has been proved:

Let $\sigma(G) = \max_{H \subseteq G} \lambda(H)$, where $\lambda(H)$ is the edge connected number of graph H .

Then for any graph G $\gamma_k(G) \leq \lceil (\sigma(G)+1)/k \rceil$, where $\gamma_k(G)$ is the minimum number of subgraphs G_i with $\sigma(G_i) < k$ covering set vertices of graphs G .

This result when $k=2$ was obtained by D.R. Lick.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ф. Харари: Теория графов. "Мир", М., 1973
2. С.М. Гюлумян, К.М. Мосесян: О критических по числу вершинного k -разбиения графах. ДАН Арм. ССР, т. LXVII, № 5, 1978.
3. В.П. Полесский: О соотношении между хроматическим числом и реберной связностью конечного графа. "Проблемы передачи информации", 7, № 1, 105-107, 1971.
4. D.R. Lick, Acyclic color functions on graphs, "Riv. mat. Univ. Parma," 1, 135-141, 1975 /1977/.
5. D. Matula, An extension of Brooks theorem, University of Texas at Austin, preprint, 1974.

КРИТИЧЕСКИЕ И МИНИМАЛЬНЫЕ k -РЕБЕРНО СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

Гюлумян С.М.

Всюду будем рассматривать конечные графы и орграфы без петель. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в [1].

Пусть $\delta(G)$, $\lambda(G)$ — соответственно минимальная степень и реберная связность некоторого неориентированного мультиграфа G . Мультиграф G называется минимальным /соответственно критическим/ k -реберно связным, если $\lambda(G)=k>\lambda(G-a)$, для любого ребра a /соответственно для любой вершины a / графа G . Аналогично можно определить минимальный k -реберно орсвязный мультиорграф D , если под реберной орсвязностью $\lambda(D)$ понимать величину равную минимальному по всем упорядоченным парам вершин (u,v) мультиорграфа D от наименьшего числа непересекающихся по дугам путей из вершины u в вершину v .

В [2] Лик доказал, что если G минимальный k -реберно связный обыкновенный /без петель и кратных ребер/ граф, то $\delta(G)=k$, а в [3] он же доказал, что для критических k -реберно связных обыкновенных графов $\delta(G)=2$ при $k=2$. Для остальных k верхняя оценка $\delta(G)$ не известна.

В настоящей работе находится значение $\delta(G)$ для критических k -реберно связных обыкновенных графов G , результат [2] усиливается и распространяется на орграфы.

Всюду под $V(G)$, $X(G)$ будем понимать соответственно множество вершин и множество ребер графа G , а если $U \subseteq V(G)$, то под $\langle U \rangle$ будем понимать подграф графа G , порожденный на вершинах U . Те же самые обозначения остаются в силе и при рассмотрении орграфа. Через $\rho(U_1, U_2)$, где $U_1, U_2 \subseteq V(G)$, будем обозначать мощ-

ность множества ребер с одним концом в U_1 и другим концом в U_2 . В случае, если $U_2 = V(G) \setminus U_1$, то будем писать $\rho(U_1, G)$. При этом, если рассматривается оргграф D , то $\rho(U_1, U_2)$ будем означать мощность множества дуг, исходящие из U_1 и заходящие в U_2 , $\rho(U_1, D)$ - мощность множества дуг, исходящие из U_1 , а $\rho(D, U_1)$ - мощность множества дуг, заходящие в U_1 . Во всех случаях, если U_1 или U_2 состоит из одной вершины v , то в наших обозначениях просто заменим соответствующее множество вершин на v .

Теорема 1. Для произвольного критического k - реберно связного обыкновенного графа G имеем место $\delta(G) = k$.

Доказательство. Пусть вершины критического k - реберно связного обыкновенного графа G пронумерованы в некоторой последовательности, то есть $V(G) = \{v_1, \dots, v_p\}$ и пусть $\lambda(G - v_i) = \mu_i < k$ для $i \in \overline{1, p}$. Рассмотрим подмножество $V_1 \subset V(G)$, обладающее тем свойством, что в V_1 имеется такой элемент v_j , чтобы $\rho(V_1 \setminus \{v_j\}, V(G) \setminus \{v_j\})$. Очевидно, такое подмножество всегда существует. Для доказательства теоремы покажем, что каждое такое подмножество содержит вершину v с локальной степенью $\rho(v, G) = k$. С этой целью рассмотрим наименьшее по мощности подмножество $V_2 \subseteq V_1$, обладающее тем же свойством, что и V_1 . Возможны два случая:

1. $|V_2| \leq k$
2. $|V_2| \geq k+1$.

Так как V_2 обладает тем свойством, что в нем существует вершина v_e такая, что $\rho(V_2 \setminus \{v_e\}, V(G) \setminus \{v_e\}) = \mu_e < k$, то в первом случае, из-за обыкновенности G , в V_2 , а значит и в V_1 , найдется вершина степени k в графе G . Следовательно, для завершения доказательства теоремы остается рассмотреть случай II.

Во втором случае, ввиду того же свойства V_2 , в $V_2 \setminus \{v_e\}$ найдется вершина v'_e , которая не смежна ни с одной вершиной из $V(G) \setminus V_2$. Пусть $\langle V_2 \rangle = G_1$, а $\langle V(G) \setminus V_2 \rangle = G_2$. Очевидно, каж-

дый наименьший реберный разрез графа $G-v'_e$ проходит как через $G_1-v'_e$ так и через G_2 , так как, в противном случае, либо вершина v'_e была бы смежна некоторой вершине из $V(G)\setminus V_2$, либо V_2 не был бы наименьшим по мощности подмножеством из V_1 , обладающим свойством $\rho(V_2\setminus\{v_e\}, V(G)\setminus\{v_e\})=\mu_e$. Пусть наименьший реберный разрез графа $G-v'_e$ делит $G_1-v'_e$ на подграфы G_1^1 и G_1^2 , а G_2 на подграфы G_2^1 и G_2^2 . Для определенности предположим, что в сложившейся ситуации вершина v_e очутилась в графе G_1^1 и пусть $\rho(v_e, V(G_1^1))=j_1$, $\rho(v_e, V(G_2^2))=j_2$, $\rho(v_e, V(G_1^2))=j_3$. Введем также следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\rho(V(G_1^1)\setminus\{v_e\}, V(G_2^1)) &= t_1, \\ \rho(V(G_1^1)\setminus\{v_e\}, V(G_2^2)) &= t_2, \\ \rho(V(G_1^1)\setminus\{v_e\}, V(G_1^2)) &= t_3, \\ \rho(V(G_2^1), V(G_2^2)) &= t_4, \\ \rho(V(G_2^1), V(G_1^2)) &= t_5, \\ \rho(V(G_2^2), V(G_1^2)) &= t_6\end{aligned}$$

Ввиду того, что произвольный наименьший разрез графа $G-v'_e$ проходит как через $G_1-v'_e$ так и через G , то очевидно $\rho(V(G_1^2), G-v'_e) > \rho(V(G_1^2) \cup V(G_2^2), G-v'_e)$ или, учитывая введенные обозначения, $t_3+t_5+t_6+j_3 > t_2+t_3+t_4+t_5+j_2+j_3$ или $t_6 > t_2+t_4+j_2$. С другой стороны, так как $\rho(V_2\setminus\{v_e\}, G)=\mu_e=\lambda(G-v_e)$, то $\rho(V(G_2^2), G-v_e) \geq \rho(V(G_2^2) \cup V(G_1^2), G-v_e)$, что означает $t_1+t_4+t_5 \geq t_1+t_2+t_5+t_6$, то есть $t_4 \geq t_2+t_6$, откуда с учетом $t_6 > t_2+t_4+j_2$ имеем $t_4 > 2t_2+t_4+j_2$. Полученное противоречие исключает случай II. Итак, теорема доказана.

Заметим, что в классе критических k -реберно связных мультиграфов G число $\delta(G)$ сверху не ограничено.

Пусть множество дуг $X(D)$ произвольного мультиорграфа D пронумерованы в некоторой последовательности, т.е. $X(D) = \{x_1, \dots, x_q\}$ и пусть $x_i = (a_i, b_i)$, $i \in \overline{1, q}$. Тогда $v(x_i, D)$ будет означать количество дуг в наименьшем дуговом разрезе X , разделяющем вершины a_i и b_i , то есть в орграфе $\langle X(D) \setminus X \rangle$

нет пути из a_i в b_i , а $v(D) = \max_i v(x_i, D)$. Очевидно, справедлива

Лемма. Если D минимальный k -реберно орсвязный мультиорграф, то $v(x_i, D) = v(D) = k$, $i \in \overline{1, q}$. Заметим, что обратное утверждение также справедливо.

Теорема 2. Для любого подграфа S произвольного минимального k -реберно орсвязного мультиорграфа D имеет место $\min\{\delta^+(S), \delta^-(S)\} \leq k$, где $\delta^+(S)$, $\delta^-(S)$ - соответственно минимальная полустепень исхода и минимальная полустепень захода S .

Доказательство. Рассмотрим произвольный подграф S мультиорграфа D и некоторую его дугу $x_i = (a_i, b_i) \in X(S)$. Пусть наименьший дуговой разрез, разделяющий a_i и b_i , делит D на подграфы B_1 и B_2 , а S - на подграфы C_1 и C_2 при этом для определенности, будем считать что $V(C_1) \subseteq V(B_1)$, $V(C_2) \subseteq V(B_2)$. Тогда, как в C_1 так и в C_2 имеется вершина v , удовлетворяющая неравенству $\min\{\rho(v, S), \rho(S, v)\} \leq k$. Не нарушая общности, покажем справедливость этого неравенства для C_1 .

Если в C_1 нет вершины v , удовлетворяющей неравенству $\min\{\rho(v, S), \rho(S, v)\} \leq k$, то рассмотрим наименьший порожденный подграф D_1 мультиорграфа B_1 , который содержит хотя бы одну вершину из C_1 и удовлетворяет $\rho(V(D_1), D) = k$ или $\rho(D, V(D_1)) = k$. Рассмотрим оба эти случая в отдельности.

Пусть сначала $\rho(V(D_1), D) = k$. Введем обозначения:
 $\langle V(D) \setminus V(D_1) \rangle = D_2$, $\langle V(D_1) \cap V(C_1) \rangle = S_1$, $\langle V(S) \setminus V(S_1) \rangle = S_2$.

Согласно нашему предположению, и в S_1 нет вершины v удовлетворяющей условию $\min\{\rho(v, S), \rho(S, v)\} \leq k$. Поэтому $X(S_1) \neq \emptyset$. Очевидно, наименьший дуговой разрез мультиорграфа D , разделяющий вершины некоторой дуги $x_e = (a_e, b_e) \in X(S_1)$, проходит как через S_1 , а значит и через D_1 , так и через D_2 , так как в противном случае D_1 не был бы наименьшим подграфом из B_1 , обладающий свойствами $V(D_1) \cap V(C_1) \neq \emptyset$ и $\rho(V(D_1), D) = k$ или $\rho(D, V(D_1)) = k$. Пусть наименьший дуговой разрез мультиорграфа D , разделяющий вершины a_e и b_e , делит D_1 на подграфы

D_1^1 и D_1^2 , а D_2 — на подграфы D_2^1 и D_2^2 , при этом пусть для определенности $a_e \in V(S_1^1) \subseteq V(D_1^1)$, $b_e \in V(S_1^2) \subseteq V(D_1^2)$. Далее положим, что $\rho(V(D_1^1), V(D_2^1)) = i_1$, $\rho(V(D_1^1), V(D_2^2)) = i_2$,
 $\rho(V(D_1^2), V(D_2^1)) = i_3$, $\rho(V(D_1^2), V(D_2^2)) = i_4$, $\rho(V(D_2^1), V(D_2^2)) = i_5$,
 $\rho(V(D_1^1), V(D_1^2)) = i_6$, $\rho(V(D_2^1), V(D_1^2)) = i_7$.

Тогда, согласно утверждению нашей леммы, очевидно $\rho(V(D_1), D) \leq \rho(D, V(D_2^2))$ или $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \leq i_2 + i_4 + i_5$, то есть $i_1 + i_3 \leq i_5$. С другой стороны, ввиду минимальности D_1 , имеем $\rho(V(D_1^1) \cup V(D_2^1), D) < \rho(V(D_1^1), D)$ или $i_2 + i_5 + i_6 + i_7 < i_1 + i_2 + i_6$, то есть $i_5 + i_7 < i_1$, откуда, учитывая $i_1 + i_3 \leq i_5$ имеем $i_3 + i_7 < 0$. Полученное противоречие исключает случай $\rho(V(D_1), D) = k$.

Пусть теперь $\rho(D, V(D_1)) = k$. После аналогичных рассуждений, введем следующие обозначения: $\rho(V(D_2^1), V(D_1^1)) = j_1$,
 $\rho(V(D_2^2), V(D_1^1)) = j_2$, $\rho(V(D_2^1), V(D_1^2)) = j_3$, $\rho(V(D_2^2), V(D_1^2)) = j_4$,
 $\rho(V(D_1^1), V(D_2^2)) = j_5$, $\rho(V(D_1^1), V(D_1^2)) = j_6$, $\rho(V(D_1^1), V(D_2^1)) = j_7$.

Тогда, согласно той же лемме, очевидно $\rho(D, V(D_1)) \leq \rho(V(D_2^1), D)$ или $j_1 + j_2 + j_3 + j_4 \leq j_1 + j_3 + j_5$, то есть $j_2 + j_4 \leq j_5$, а $\rho(V(D_1^1) \cup V(D_2^1), D) < \rho(D, V(D_2^1))$ ввиду минимальности D_1 , что означает $j_3 + j_5 + j_6 + j_7 < j_3 + j_4 + j_6$, то есть $j_5 + j_7 < j_4$. Отсюда, учитывая $j_2 + j_4 \leq j_5$, имеем $j_2 + j_7 < 0$. Вновь получили противоречие. Следовательно, в C_1 имеется вершина v , удовлетворяющая неравенству $\min\{\rho(v, S), \rho(S, v)\} \leq k$. Теорема доказана.

Следствие. Для произвольного минимального k -реберно связного мультиграфа G число $W(G) = \max_{H \subseteq G} \delta(H) \leq k$.

Для доказательства, зафиксируем произвольный подграф H из G и рассмотрим мультиорграф D , который получается из G , если вместо каждого ребра $(vu) \in E(G)$ включим в множество дуг мульт-

тиорграфа D дуги (vu) и (uv) . Очевидно, тогда D является минимальным k -реберно связным мультиорграфом. Следовательно, согласно теореме 2, для произвольного порожденного подграфа S мультиорграфа D имеет место $\min\{\delta^+(S), \delta^-(S)\} \leq k$, причем, по определению D , для любой вершины v из S имеет место $\rho(v, S) = \rho(S, v)$, значит и $\delta^+(S) = \delta^-(S)$. Поэтому, если перейти к графу G , то подграф H из G должен удовлетворять условию $\delta(H) \leq k$. Что и требовалось доказать.

Заметим, что в классе критических k -реберно связных обыкновенных графов G число $W(G)$ сверху не ограничено.

S u m m a r y

Critically and Minimally k -line Connected Graphs

Multigraph G is called minimally (critically) k -line connected, if his edges connected is equal to k and more then edges connected of graph $G-a$ for any edge a (vertex a).

The following assamptions have been proved:

1. Minimal degree $\delta(G)$ of arbitrary critically k -line connected graph G without loops and multiple edges is equal to k .
2. For every minimally k -line connected multigraph G the number $W(G) = \max_{H \subseteq G} \delta(H) \leq k$

The first result when $k=2$ for the first time obtained D.R. Lick proved, that for minimally k -line connected graph G $\delta(G)=k$, it is followed from the second result.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Й.Харари: Теория графов. "Мир", М., 1973.
2. D.R.Lick, Minimally n -line connected graphs, "J. reine and angew. math.", 252, 178-182, 1972.
3. D.R.Lick, A survey of critically and minimally n -connected n -line connected graphs, "Math. jap.", 18, No.2, 99-106, 1973.

ОЦЕНКА ДЛИН КОНТУРОВ И ПУТЕЙ В РЕГУЛЯРНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ
ГРАФОВ

Дарбинян С.Х.

Будем рассматривать конечные оргграфы без петель и кратных дуг. Все понятия и обозначения не определяемые здесь, можно найти в книге [1].

В работах Нэш-Вильямса [2], Эрдёша и Хоббса [3] доказаны гамильтоновость некоторых классов конечных неориентированных регулярных графов. В работе [4] доказана панциличность любого $(2n+1)$ - вершинного, $n \geq 8$, $(n-1)$ - регулярного направленного графа. В предлагаемой работе исследуются некоторые свойства регулярных направленных графов связанные с существованием контуров и путей с некоторыми свойствами.

Пусть $G=(V(G), E(G))$ оргграф, где $V(G)$ множество его вершин, а $E(G)$ множество дуг. Путь состоящий из вершин x_1, x_2, \dots, x_m и дуг (x_i, x_{i+1}) , $1 \leq i \leq m-1$, обозначим через $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_m \rightarrow x_1$, а контур полученный из этого пути после добавления дуги (x_m, x_1) - через $(x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_m \rightarrow x_1)$. Пусть $A, B \subseteq V(G)$ и $x \in V(G)$. Введем обозначения:

$$E(A \rightarrow B) = \{(x, y) / x \in A, y \in B\},$$

$$O(x) = \{y \in V(G) / (x, y) \in E(G)\},$$

$$I(x) = \{y \in V(G) / (y, x) \in E(G)\},$$

$$O_A(x) = A \cap O(x), \quad I_A(x) = A \cap I(x),$$

$$id(x, A) = |O_A(x)|; \quad od(x, A) = |I_A(x)|,$$

$$id^*(x) = |V(G)| - id(x) - 1, \quad od^*(x) = |V(G)| - od(x) - 1.$$

Напомним, что $od(x)(id(x))$ называется полустепенью исхода /захода/ вершины x , а $od^*(x)(id^*(x))$ полустепень незахода /неисхода/. Как обычно через C_k обозначим контур длины k .

Для любого орграфа G , где $|V(G)| \geq 3$ для всякой различной вершины $x, y \in V(G)$ и для любого $r \in [3, |V(G)-1]$ через $\Omega_G^r(x, y)$ обозначим множество путей длины r , вердущие из x и y .

Пусть $P = (v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_r) \subset G$ некоторый путь в орграфе G и x некоторая вершина, не принадлежащая пути P . Для любого i , $1 \leq i \leq r-1$ обозначим

$$B_i(x) = \{v_j / i-j \geq 1, (v_{i-j}, x) \in E(G)\}.$$

Пусть $C = (v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_r \rightarrow v_1)$ некоторый контур в орграфе G и $x \in V(G) \setminus V(C)$. Для любого i , $1 \leq i \leq r$ обозначим

$$D_i(x) = \{v_j / (v_{i-j}, x) \in E(G)\}.$$

Перечислим несколько простых свойств, относящихся к орграфам, которые в последствие часто будут использоваться.

Лемма 1. Пусть G есть P -вершинный оргграф. $P = (v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_r) \subset G$ и $R = (u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_q) \subset V(G) \setminus V(P)$, где $1 \leq q \leq p-q$. Тогда

а/ если для всех $\ell \geq 1$ имеется место $\Omega_G^{r+\ell}(v_0, v_r) = \emptyset$, то для всяких $i \in [0, r-1]$ и $k = [1, \max\{j / i+j \leq r, 1 \leq j \leq q\}]$ справедливо соотношение

$$|E(v_i \rightarrow u_1)| + |E(u_q \rightarrow v_{i+k})| \leq 1.$$

б/ если $\Omega_G^{r+1}(v_0, v_r) = \emptyset$, $(v_s, v_f) \in E(G)$ и для всех $j \in [\beta, r]$ и $i \in [0, \alpha]$ имеет место $(u_q, v_i), (v_j, u_1) \in E(G)$, где $1 \leq \alpha < \beta \leq r-1$, $t \in [\beta+1, r]$, $s \in [1, t-q-1]$, то для $k = \min\{\alpha-1, s-1\}$ имеет место соотношение

$$E(\{v_0, v_1, \dots, v_k\} \rightarrow v_{s+q}) = \emptyset.$$

Лемма 2. Пусть G - произвольный p -вершинный оргграф, $C_r = (v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_r \rightarrow v_1)$ и $P = (u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_q) \subset V(G) \setminus V(C_r)$, где $p \geq 3$, $2 \leq r \leq p-q$. Если для некоторого ℓ , $1 \leq \ell \leq q$, G не содержит контур длины $r+\ell$, то для любого $i \in [1, r]$ имеет место

$$|E(v_i \rightarrow u_1)| + |E(u_q \rightarrow v_{i+q-l-1})| \leq 1.$$

Лемма 3. Пусть $P = (v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_r) \in T_p$, $x \in V(T_p) \setminus V(P)$ и для всех $i \in [0, \alpha]$, $j \in [\beta, r]$, где $2 \leq \alpha < \beta \leq r-1$ и T_p есть p -вершинный турнир, имеет место $(x, v_i), (v_j, x) \in E(T_p)$. Если $Q_{T_p}^{r+1}(v_0, v_r) = \emptyset$ и для некоторых $s \in [1, \alpha-1]$ и $t \in [\beta+1, r]$ имеет место $(v_s, v_t) \in E(T_p)$, то для любых $s, t \in [0, s-1]$ и $t, t \in s+2, t-1$ справедливо неравенство

$$|E(v_s \rightarrow v_{t_1})| + |E(v_{t_1-1} \rightarrow v_{s_1+1})| \leq 1.$$

Лемма 4. В любом P - вершинном направленном графе G , где $p \geq 1$, существуют вершины x и y /соответственно x_1 и y_1 / с $od(x) \leq \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$ и $od^*(y) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ ($id(x_1) \leq \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$ и $id^*(y_1) \geq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$).

С помощью теоремы Ландау [5], которая утверждает, что для любого p - вершинного T_p имеет место

$$\sum_{x \in V(T_p)} od(x) = \sum_{x \in V(T_p)} id(x) = \frac{p(p-1)}{2}$$

нетрудно показать, что справедлива следующая

Теорема 1. Пусть G - произвольный p -вершинный направленный граф. Тогда

а/ если $\max_{x \in V(G)} \{od^*(x)\} = \frac{p-1}{2}$ /соответственно, $\max\{id^*(x)\} \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ /, то существует по крайней мере $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ вершин со степенью не исхода /не захода/ равное $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.

б/ G является регулярным турниром тогда и только тогда, когда $\max_{x \in V(G)} \{od^*(x)\} = \frac{p-1}{2}$ или $\max_{x \in V(G)} \{id^*(x)\} = \frac{p-1}{2}$.

в/ G является почти регулярным турниром тогда и только тогда, когда $\max_{x \in V(G)} \{od^*(x)\} = \frac{p}{2}$ ($\max_{x \in V(G)} \{id^*(x)\} = \frac{p}{2}$) и существует точно $\frac{p}{2}$ вершин со степенью не исхода /не захода/ равное $\frac{p}{2}$.

Для любых $n \geq 1$ и $k \geq 1$ обозначим через Ω_{2n+1}^{n-k} множество всевозможных $(2n+1)$ -вершинных $(n-k)$ -регулярных направленных

ных графов, т.е. GE_{2n+1}^{n-k} , то для любой вершины $v \in V(G)$ имеет место $id(x)=od(x)=n-k$ и $od^*(x)=id^*(x)=n+k$.

Теорема 2. Пусть $n \geq 7k-2$ и GE_{2n+1}^{n-k} . Тогда любая вершина $x \in V(G)$ находится на контуре любой длины $r \in [3, 5]$.

Доказательство. Из $n \geq 7k-2$ следует, что для любой вершины x имеет место $E(\langle O_A(x) \rangle) \neq \emptyset$. Значит, в G существует транзитивная тройка вершин x, y, z (т.е. такие вершины, что $(x, y), (y, z), (x, z) \in E(G)$).

Если $L = E(O(z) \rightarrow I(x)) \neq \emptyset$, то очевидно, что $C_4, C_5 \subset C$. Поэтому можно предполагать, что $L = \emptyset$. Применяя лемму 4 к подграфу $\langle I(x) \setminus S \rangle$, где $S = O(z) \cap I(x)$, получаем, что существует вершина $u \in I(x) \setminus S$ такая, что

$$\begin{aligned} id^*(u) &\geq |O(z)| + \left\lceil \frac{|I(x) \setminus S|}{2} \right\rceil \geq \\ &\geq n+k + \lceil (n-5k - |S| + 4)/2 \rceil. \end{aligned}$$

Считая, что $id^*(u)=n+k$, откуда получаем $n-5k - |S| + 3 \leq 0$. Поэтому, т.к. $E(\langle S \rangle) = \emptyset$, то $|S| = 2k+1$ и $n = 7k-2$.

Пусть $H = V(G \setminus (O(z) \cup I(x) \cup \{x, y, z\}))$

и пусть $v \in O(z) \setminus S$ и $w \in I(x) \setminus S$.

Нетрудно заметить, что

$$\min\{id(w, H), od(v, H)\} \geq 2k.$$

Отсюда и из $|A| = 4k-1$ вытекает, что $O_H(v) \cap I_H(w) \neq \emptyset$. Поэтому $C_4 = (x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow u_1 \rightarrow x)$ и $C_5 = (x \rightarrow y \rightarrow v \rightarrow u_2 \rightarrow w \rightarrow x)$, где $u_1 \in S$ и $u_2 \in O_H(v) \cap I_H(w)$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $E(O(x) \rightarrow I(x)) \neq \emptyset$, а это следует из леммы 4. Теорема доказана.

Замечание 1. Следующий пример показывает, что в теореме 2 ограничение на n при $k=1$ не улучшаемо / GE_9^3 и не содержит кон-

тур длины 4 и 5/.

$$G = (\{1, 2, \dots, 9\}, \{\{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}, \{4, 5, 6\} \rightarrow \{7, 8, 9\}, \{7, 8, 9\} \rightarrow \{1, 2, 3\}\})$$

Замечание 2. По принципу ориентированной двойственности утверждения всех лемм останутся справедливыми, если в их формулировках заменить число $od(x, H)$ на $id(x, H)$.

Аналогично доказательству теоремы 2 можно доказать

Теорема 3. Пусть $n \geq 5k+1$ и Geo_{2n+1}^{n-k} . Тогда для любых различных вершин $x, y \in V(G)$ существует путь длины 2 или 3 из вершины x в y .

Лемма 5. Пусть Geo_{2n+1}^{n-k} , где $n \geq 8k$ и $k \geq 1$ и $P = (v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_r) \subset G$ является путем максимальной длины из вершины v_1 в v_r . Тогда

а/ для любой вершины x не принадлежащей пути P имеет место $od(x, P) \geq 2k$

б/ если $|V(G) \setminus V(P)| \geq 2k+1$, $\langle V(G) \setminus V(P) \rangle$ не является сильно связным.

Доказательство. Пусть $A = V(G) \setminus V(P)$ и пусть утверждение а/ леммы неверно. Тогда $od(x, P) = m \leq 2k-1$ и $d(x, A) = n-k-m$.

Обозначим через M подмножество таких вершин множества $I_A(x)$, которое достижимо из вершины x , а через N - подмножество таких вершин множества $I_A(x)$, которые не достижимы из вершин x .

Из леммы 1 непосредственно вытекает, что

$$E((\cup_{A} O_A(x) \cup \{x\}) \rightarrow N \cup V_1(x)) = \emptyset. \quad /1/$$

Применяя лемму 4 к подграфу $\langle N \cup V_1(x) \rangle$ и используя вышеполученное соотношение /1/, получаем, что существует такая вершина $z \in V_1(x) \cup N$, для которой имеет место неравенство

$$id^*(z) \geq |O_A(x) \cup \{x\}| + \lceil (|V_1(x) \cup N|) / 2 \rceil \geq (n-k-2m+|M|) / 2$$

Отсюда и из $id^*(z)=n+k$ вытекает, что $n-k-2m+|M| \leq 4k$. Следовательно, $|M| \leq 2m+5k-n$ и, значит, $|M| \leq k-2$. Из /1/ и из леммы 4 следует, что для $H=MO_A(x)$ имеет место

$$\lceil |H|/2 \rceil \leq \max_{y \in H} \{od^*(y, H)\} \leq n+k-|B_1(x) \cup N|.$$

Отсюда с помощью неравенств $|O_A(x)| \geq n-3k+1$, $|M| \leq k+2$ и $|B_1(x) \cup N| \geq n-k-1$ нетрудно убедиться, что

$$\max_{y \in H} \{od^*(y, H)\} = \lceil |H|/2 \rceil = n+k-|B_1(x) \cup N|.$$

Следовательно, по теореме 1 $\langle H \rangle$ является регулярным турниром. Значит, по /1/ для $z \in O_A(x)$ имеет место

$$od^*(z) \geq \lceil |H|/2 \rceil + |N \cup B_1(x) \cup \{x\}| \geq n+k+1,$$

что является противоречием.

Теперь предположим, что $\langle A \rangle$ является сильно связным. Тогда из теоремы 2 и из утверждения а/ вытекает, что $r \geq 3$ и для любой вершины $x \in A$ справедливо неравенство.

$$\min\{od(x, P), id(x, P)\} \geq 2k \geq 2.$$

Следовательно, существуют такие $s \in [1, r-1]$ и $t \in [2, r]$, что $E(v_s \rightarrow A) \neq \emptyset$ и $E(A \rightarrow v_t) \neq \emptyset$. Отсюда и из сильно связности $\langle A \rangle$ и из того факта, что $|A| \geq 2k+1$, следует

$$\forall i \in [s+1, r] ((E(A \rightarrow v_i) = \emptyset) \& (E(v_i \rightarrow A) \neq \emptyset)) \quad /2/$$

$$\forall i \in [1, t-1] ((E(A \rightarrow v_i) \neq \emptyset) \& (E(v_i \rightarrow A) = \emptyset)) \quad /3/$$

Следовательно, $s-1 \leq t \leq s+t-1$

$$I_A(v_r) = O_A(v_1) = \emptyset \quad /4/$$

Так $t \geq 2$ и $s \leq r-1$, то применив лемму 1 и пользуясь /4/ получим, что $|A| \leq 2k+2$ и $r \geq 2n-2k-1$.

Покажем, что $t=n-2k$. Действительно, по лемме 4 в подграфе $\langle A \rangle$ существует такая вершина $x \in A$, что $od^*(x, A) \geq \lceil |A|/2 \rceil$ следовательно, из /2/ имеем

$$\text{od}^*(x) \geq \left\lceil \frac{|A|}{2} \right\rceil + r + \begin{cases} -s, & \text{при } t=s \\ -s+1, & \text{при } t=s-1. \end{cases}$$

Отсюда и из $|A| \leq 2k+2$ следует, что

$$\text{od}^*(x) \geq \begin{cases} 2n-k-s, & \text{при } t=s, \\ 2n-k+1-s & \text{при } t=s-1. \end{cases}$$

Следовательно, т.к. $\text{od}^*(x)=n+k$, то $t \geq n-2k$.

Поскольку $t \geq 5$, то с помощью леммы 1 получаем, что $(v_2, v_r) \in E(G)$. Отсюда и из неравенства $t \geq n-2k$ и из замечания 1 следует, что $r-s \geq n-2k-1$, $(v_1, v_{r-1}) \in E(G)$.

Пусть $(x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_d) \subset \langle A \rangle$, где $x_1 \in O_A(v_{r-2})$ и $x_d \in I_A(v_2)$ и этот путь является максимальным по длине с этим свойством.

Случай 1. $d \geq 2$.

Применяя лемму 1 и пути P и используя те факты, что имеет место $(v_2, v_r) \in E(G)$, $|A| \geq 2k+1$ и соотношение /4/ легко заметить,

$I(v_r) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-k}, v_{r-1}\}$, $O(v_1) = \{v_2, v_{n-k+2}, v_{n-k+3}, \dots, v_r\}$.
С другой стороны, из неравенства $\min\{t, r-s+1\} \geq n-2k$ и из соотношения [2] и [3] следует существование таких $i \in [3, \min\{t, n-k\}]$, $j \in [\max\{s, n-k+1\}, r-2]$ для которых имеет место $(x_1, v_i), (v_j, x_2) \in E(G)$. Следовательно, путь $(v_1 \rightarrow v_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{r-1} \rightarrow x_1 \rightarrow v_i \rightarrow \dots \rightarrow v_j \rightarrow x_2 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v_r)$ длиннее пути P , а это противоречит условию максимальности пути P .

Случай 2. $d=1$.

Тогда очевидно, что

$$E(A \setminus \{x_1\}, v_{r-1}) = E(A \setminus \{x_1\}, v_2) = \emptyset.$$

Отсюда, т.к. $|A| \geq 2k+1$, то вершины v_2 и v_{r-1} смежны со всеми вершинами множества $V(P)$. Следовательно, поскольку $(v_2, v_r) \in E(G)$, $(v_1, v_{r-1}) \in E(G)$, то по лемме 3 имеем, что если $(v_i, v_r) \in E(G)$, где $2 \leq i \leq r-3$, то $(v_{i+1}, v_{r-1}) \in E(G)$.

Пусть $(v_{r-3}, v_r) \notin E(G)$. Тогда легко заметить, что

$$I(v_r) \doteq \{v_1, v_2, \dots, v_{n-k-1}, v_{r-1}\}.$$

Следовательно, как было замечено выше, имеем

$$\{v_3, v_4, \dots, v_{n-k}\} \rightarrow v_{r-1}.$$

Отсюда, т.к. $E(v_{r-2} \rightarrow A) \neq \emptyset$, то применив лемму 1 к пути $(v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{r-1}) \subset G$ получаем $E(\{v_{r-2}, v_{r-1}\} \setminus A \setminus \{x_1\}) = \emptyset$. Поэтому $(v_{n-k+1}, v_{r-2}) \in E(G)$. Снова применив лемму 1, получим $od^*(v_1) \geq n+k+1$, что является противоречием.

Пусть теперь $(v_{r-3}, v_r) \in E(G)$.

Так как $(v_{r-2}, v_r) \notin E(G)$, то легко заметить, что $E(v_{r-2} \rightarrow A \setminus \{x_1\}) = \emptyset$. Далее достаточно повторить те же рассуждения, что и для случая $(v_{r-3}, v_r) \notin E(G)$, чтобы получить противоречие ($od^*(v_1) \geq n+k+1$).

Возможны случаи рассмотрены. Лемма доказана.

Теперь сформулируем и докажем две теоремы, которые оценивают снизу наибольшего пути из любой вершины в любую другую вершину и длину максимального контура.

Теорема 4. Пусть $n \geq 8k$ и $g \in Q_{2n+1}^{n-k}$. Тогда для любых различных вершин $u, v \in V(G)$ существует путь из вершины u в v длины не менее, чем $2n-4k$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно, т.е. существуют вершины $u, v \in V(G)$, для которых любой путь из вершины u в v имеет длину менее чем $2n-4k$.

Пусть $P = (u = v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_r = v)$ является путем максимальной длины из вершины u в v . Тогда $r \leq 2n-4k$. Отсюда $|A| \geq 4k+1$, где $A = V(G) \setminus V(P)$ и по утверждению б/ леммы 5 подграфа $\langle A \rangle$ не является сильно связным. Пусть G_1, G_2, \dots, G_s , где $s \geq 2$, бикомпоненты подграфа $\langle A \rangle$, которые пронумерованы таким образом, что нет дуг, исходящих из бикомпоненты с большим номером

и заходящих бикомпоненту с меньшим номером.

Пусть для определенности

$$m_1 = |V(G_1)|, \quad m_2 = \left| \bigcup_{i=2}^{s-1} V(G_i) \right|, \quad m_3 = |V(G_s)|.$$

По лемме 4 имеем, что существует такая вершина $x \in V(G_1)$ для которой имеет место $\text{id}(x, V(G_1)) \leq \lfloor (m_1 - 1)/2 \rfloor$. Следовательно,

$$\text{id}(x, P) \geq n - k - \lfloor (m_1 - 1)/2 \rfloor. \quad /5/$$

Так как $\langle A \rangle$ является слабо связным, то без потери общности можно предполагать, что вершины множества $V(G_s)$ в подграфе $\langle A \rangle$ достижимы из вершин множества $V(G_1)$.

Применяя лемму 1 к пути P и используя вышесказанное получаем, что для некоторой вершины $y \in V(G_s)$ имеет место

$$\text{od}^*(y) \geq m_1 + m_2 + \lfloor m_3/2 \rfloor + |B_2(x) \cup B_2(x)|. \quad /6/$$

Из /5/ следует, что для $\alpha \leq 1$ имеет место

$$|B_1(x) \cup B_2(x)| = n - k - \lfloor (m_1 - 1)/2 \rfloor - \alpha \quad /7/$$

Объединив /6/ и /7/ получим

$$\text{od}^*(y) \geq n - k + (|A| + m_2)/2 - \alpha.$$

Отсюда и из $|A| \geq 4k + 1$ следует, что $\alpha = 1$, $|A| \leq 4k + 2$, $m_2 \leq 1$. Поэтому

$$|B_1(x) \cup B_2(x)| = n - k - \lfloor (m_1 - 1)/2 \rfloor - 1,$$

и значит, $B_2(x) \subseteq B_1(x)$. Следовательно, для некоторого $i \in [3, r-1]$ имеет место

$$\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_r\} \rightarrow x, \quad y \rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_i\}, \\ E(\{v_1, v_2, \dots, v_r\} \rightarrow V(G_1)) = \emptyset.$$

Отсюда с помощью леммы 1 легко заметить, что $O_A(v_1) = I_A(v_r) = \emptyset$. Так как $(v_{r-1}, x), (y, v_2) \in E(G)$ и y достижима из вершины x , то можем применить лемму 1 к пути P . В результате получим

$$\text{od}^*(v_1) \geq |A| + |I(v_r) \cap \{v_2, v_3, \dots, v_{r-2}\}| \geq n + k + 1,$$

а это противоречит условию $\text{od}^*(v_1) = n + k$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. Пусть $n \geq 8k$ и $g \in \Omega_{2n+1}^{n-k}$. Тогда любая дуга $(x, y) \in E(G)$ находится на контуре длины не менее чем $2n-4k+1$.

Лемма 6. Пусть $n \geq 8k$ и $g \in \Omega_{2n+1}^{n-k}$. Если $C = (v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_r) \subseteq G$ является контуром максимальной длины и $r \leq 2n-2k$, то для всякой вершины $x \in V(G) \setminus V(C)$ имеет место $\text{id}(x, C) \neq n-k$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно, т.е. для некоторой вершины $x \in A = V(G) \setminus V(C)$ имеет место $\text{id}(x, C) = n-k$.

Так как путь $(v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_r)$ является путем максимальной длины из вершины v_1 в v_r , то по утверждению а/ леммы 5 и по замечанию 1 имеем, что для любой вершины $y \in A$ справедливо неравенство

$$\min\{\text{id}(y, C), \text{od}(y, C)\} \geq 2k.$$

Отсюда с помощью леммы 2 имеем $\beta(y, C) \geq 1$.

Пусть $(x = x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_d) \subseteq \langle A \rangle$ является путем максимальной длины, исходящий из вершины x . Из $\beta(y, C) \geq 1$ и из $\text{id}(x, C) = n-k$ следует, что $d \geq 2$. Далее по максимальнойности пути $(x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_d)$ имеем

$$E(x_d \rightarrow A \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{d-2}, x_d\}) = \emptyset \quad /8/$$

С другой стороны, поскольку $\text{od}(x, C) \geq 2k$ и $\text{id}(x, C) = n-k$, то нетрудно показать, что для $t = \min\{2k, d\}$ имеет место

$$\left| \bigcup_{i=1}^d B_i(x) \right| \geq n-k+t-1. \quad /9/$$

По лемме 2 имеет, что

$$E(x_d \rightarrow \bigcup_{i=1}^d B_i(x)) = \emptyset \quad /10/$$

Пользуясь утверждением б/ леммы 5 получим, что $\langle A \rangle$ не является сильно связным. Следовательно, при $d = |A|$ /т.е. путь $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_d$ является гамильтоновым путем для подграфа $\langle A \rangle$ имеет место $E(x_d \rightarrow x_1) = \emptyset$ и $d \geq 3$. Отсюда с помощью /8/, /9/ и /10/ получим

$$\text{od}^*(x_d) \geq \left| \bigcup_{i=1}^d B_i(x) \right| + \begin{cases} |\{x_1, x_{d-1}\}|, & \text{при } d=|A|, \\ |A \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{d-2}, x_d\}|, & \text{при } d \neq |A|, \end{cases}$$

или

$$\text{od}^*(x_d) \geq n-k+t+\begin{cases} 1, & \text{при } d=|A| \\ |A|-d, & \text{при } d \neq |A|. \end{cases}$$

Отсюда

$$\text{od}^*(x_d) \geq n-k+t+\max\{1, |A|-d\} \geq n+k+1,$$

а это противоречит условию $\text{od}^*(x_d)=n+k$. Лемма доказана.

Теперь с помощью леммы 6 покажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть $n \geq 8k$ и $ge\Omega_{2n+1}^{n-k}$. Тогда G содержит контур длины не менее чем $2n-(8k-1)/3$.

Доказательство. Пусть $ge\Omega_{2n+1}^{n-k}$ и $C=(v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_r)$ является контуром максимальной длины.

Допустим, что $r \leq 2n-(8k-1)/3$ и пусть G_1, G_2, \dots, G_3 бикомпоненты подграфа $\langle A \rangle$, которые пронумерованы таким образом, что нет дуг, исходящих из бикомпоненты с большим номером и заходящих бикомпоненту с меньшим номером.

Из леммы 5 следует, что $s \geq 2$

Из леммы 6 и 5 имеет, что для любой вершины $y \in A$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \min\{\text{id}(y, C), \text{od}(y, C)\} &\geq 2k; \\ \max\{\text{id}(y, C), \text{od}(y, C)\} &\leq n-k-1. \end{aligned}$$

Применяя лемму 4 к подграфу G_1 получим, что существует такая вершина $x \in V(G_1)$, для которой справедливо неравенство

$$\text{id}(x, V(G_1)) \leq \lfloor (|V(G_1)|-1)/2 \rfloor.$$

Следовательно,

$$\text{id}(x, C) \geq n-k - \lfloor (|V(G_1)|-1)/2 \rfloor.$$

Пусть

$E(V(G_1) \rightarrow \bigcup_{i=2}^s V(G_i)) \neq \emptyset$
и $(x=x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_d) \subseteq \langle A \rangle$ является путем максимальной длины, исходящей из вершины x такой, что $x_d \in \bigcup_{i=2}^s V(G_i)$. Тогда нетрудно заметить, что

$$E(x_d \rightarrow \bigcup_{i=2}^s V(G_i) \setminus \{x_2, x_3, \dots, x_d\}) = \emptyset \quad /12/$$

Далее с помощью /11/ нетрудно заметить, что для $t = \min\{d, 2k\}$ имеет место

$$\left| \bigcup_{i=1}^d B_i(x) \right| \geq n - k + t - 1 - \lfloor (|V(G_1)| / 2) \rfloor. \quad /13/$$

Так как C является контуром максимальной длины, то

$$E(x_d \rightarrow \bigcup_{i=1}^d B_i(x)) = \emptyset.$$

Отсюда с помощью /12/ и /13/ получим

$$\text{od}^*(x_d) \geq \begin{cases} n + k + \lfloor |V(G_1)| / 2 \rfloor, & \text{при } t \geq 2k, \\ n - k + d + |A \setminus (V(G_1) \cup \{x_1, \dots, x_d\})| + \left\lceil \frac{|V(G_1)|}{2} \right\rceil, & \text{при } t \leq 2k - 1. \end{cases}$$

Отсюда, т.к. $|V(G_1)| \geq 3$, то $t = d \geq 2k - 1$ и

$$\text{od}^*(x_d) \geq n + k + \left\lceil \frac{|A| + |V(G_1)|}{2} \right\rceil$$

Следовательно,

$$|A| + \left| \bigcup_{i=2}^s V(G_i) \right| \leq 4k + 1$$

С другой стороны, без потери общности можно предполагать, что

$$\left| \bigcup_{i=2}^s V(G_i) \right| \geq \frac{1}{2} |A|.$$

С помощью двух последних неравенств получаем, что $|A| \leq \frac{8k+2}{3}$, а это противоречит предположению того, что $|A| > \frac{8k+2}{3}$.

Пусть теперь

$$E(V(G_1) \rightarrow \bigcup_{i=2}^s V(G_i)) = \emptyset$$

и $(x=x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_d) \subseteq \langle A \rangle$ является путем максимальной длины, исходящей из вершины x . Тогда имеем, что

$$E(x_d \rightarrow A \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_d\}) = \emptyset.$$

Аналогично предыдущему случаю, для $t = \min\{d, 2k\}$ имеем

$$\text{od}^*(x) \geq n - k + t + 1 + \left| \bigcup_{i=2}^s V(G_i) \right| - d + \lfloor |V(G_1)| / 2 \rfloor.$$

Отсюда. поскольку

$$\left| \bigcup_{i=2}^s V(G_i) \right| \geq |V(G_1)| \geq d,$$

то $t=d$. Значит

$$\text{od}^*(x) \geq n-k + \left\lceil \left(|A| + \left| \bigcup_{i=2}^s V(G_i) \right| + 2 \right) / 2 \right\rceil$$

Следовательно, $|A| \leq 8k/3$, а это противоречит предположению того, что $|A| > (8k+2)/3$. Теорема доказана.

Summary

ESTIMATE OF LENGTH CYCLES AND PATHS IN ASYMMETRIC REGULAR DIGRAPHS

S.Kh. Darbinian

Let C is an asymmetric digraph with $2n+1$ vertices and regular of degree $n-k$, $k \geq 1$, $n \geq 1$.

In this paper it is proved the following:

- 1/ if $n \geq 7k-2$ and $x \in V(G)$, then for any k , $3 \leq k \leq 5$, digraph G contains a cycle C of length k , such that $x \in V(C)$;
- 2/ if $n \geq 8k$, then for each distinct vertices x and y there is a path of length at least $2n-4k$,
- 3/ if $n \geq 8k$, then digraph G contains a cycle of length at least $2n-(8k-1)/3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Харари: Теория графов, М., "Мир", 1973, 234 с.
2. C.St.J.A. Nash-Williams: Hamiltonian arcs and circuits, Recent Trends in Graph Theory, Springer-Verlag, Berlin, 197-210.
3. P. Erdős and A.M. Hobbs: Hamiltonian Cycles in Regular Graphs of Moderate Degree, J. of Combin. Theory, B23, 139-142, 1977.
4. С.Х. Дарбинян, К.М. Мосесян: О панцикличности регулярных орграфов, ДАН Арм. ССР, 1978, LXVII, № 4, 208-211.
5. H.G. Landau: On dominance relations and structure of animal societies, III, the condition for a score structure, Bull. Math. Biophys., 1953, 15, 143-148.

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О БИХРОМАТИЧНОСТИ ПЛОСКИХ ГИПЕРГРАФОВ

Инджеян С.Г.

В настоящей работе приводятся два достаточных условия для бихроматичности плоских гиперграфов. Все понятия, неопределяемые здесь можно найти в [1; 2; 3].

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ произвольное множество, а E — произвольное семейство подмножеств из X . Пара $H = (X, E)$ называется гиперграфом, множеством вершин X и множеством ребер E . Будем считать, что $|e| \geq 2$ для любого $e \in E$.

$m_i(H)$ — число ребер H , степени i . H' — граф, порожденный ребрами степени 2 и им инцидентными вершинами. Под раскраской гиперграфа понимается раскраска в смысле Эрдёша-Хайнала, т.е. такая, при которой каждое ребро содержит по крайней мере две разноцветные вершины.

Каждому гиперграфу адекватно соответствует его граф инциденций, множеством вершин которого является $X \cup E$, а множеством ребер $\{(x, e) \in X \times E : x \in e\}$. Гиперграф называется плоским если его граф инциденций плоский.

Через $d_G(x_i, x_j)$ обозначим расстояние между вершинами x_i и x_j в графе G .

n — грань плоского графа G назовем грань, на краю которой лежат n вершины. Плоский граф G с k конечными ребрами назовем (n, t) — квазираскрашиваемым, если его вершины можно окрасить n цветами так, чтобы концы помеченных ребер были окрашены различно, а каждая ℓ -грань, где $\ell \geq t$, содержала хотя бы две вершины разного цвета.

Теорема 1. Плоский гиперграф H бихроматичен, если H' бихроматичен и для любого гиперграфского ребра $e \in H$ имеет место $|e| \geq m_2(H) + 1$.

Для доказательства этой теоремы достаточно показать справедливость следующей леммы /см. 4./.

Лемма 1. Каждый плоский граф без 2-граней и k помеченными ребрами, которые не составляют нечетных циклов, $(2, t+1)$ – квазираскрашиваем.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по числу k . При $k=2$ имеем известную теорему Бурштейна-Косточки [2]. Предположим лемма верна для всех $k < t$ и докажем ее для $k=t$. Пусть при $k=t$ лемма не верна. G обозначает класс плоских графов с минимальным числом вершин и t помеченными ребрами для которых лемма не верна. Рассмотрим граф $G \in G$ с минимальным числом ребер.

Утверждение 1. G не содержит цикла, все ребра которого помечены.

Доказательство. Пусть утверждение 1 не верно и C – цикл все ребра которого помечены. Возможны следующие случаи.

Случай 1. C является разделяющим циклом.

Тогда разделим G по этому циклу на внутреннюю и внешнюю части G_1 и G_2 , причем цикл C участвует в обоих графах /рис. 1./.

Очевидно графы G_1 и G_2 содержат по крайней мере по одной вершине меньше чем G . Следовательно графы G_1 и G_2 являются $(2, t+1)$ – квазираскрашиваемыми. Если раскраски графа G_1 и G_2 таковы, что цвета вершин цикла C в G_1 совпадают с цветами соответствующих вершин цикла C в G_2 , то обе эти раскраски порождают $(2, t+1)$ – квазираскраску для G . Если же это

не так, то перекрасим, скажем в G_1 , вершины цвета γ и 2 и наоборот. Очевидно новая раскраска G_1 и раскраска G_2 порождают $(2, t+1)$ -квазираскраску для G . Следовательно, случай 1 не возможен.

Случай 2. C не является разделяющим циклом.

Без потери общности предположим, что во внутренней части цикла нету вершин. Если во внутренней части этого цикла есть хотя бы одно ребро /очевидно оно соединяет две вершины цикла C /, то противоречие очевидно. Если же нету такого ребра, то очевидно существуют две не смежные вершины цикла C /так как на C лежат не менее 4 вершин/, которые можно отождествить не нарушая условие плоскости. Новый полученный плоский граф G' имеет на одну вершину меньше чем G , следовательно является $(2, t+1)$ -квазираскрашиваемым. После этого восстановим G оставив цвета отождествленных вершин без изменения. Очевидно, эта раскраска будет $(2, t+1)$ -квазираскраска для G . Утверждение 1 доказано.

Так как G не содержит цикла, все ребра которого помечены, то должна существовать хотя бы одна вершина, которой инцидентно только одно помеченное ребро. Пусть это есть вершина x и пусть $\rho(x) = \ell$. /рис. 2./

Без потери общности можно считать, что ни одна из граней $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{\ell-2}$ не является 3-гранью. Удалим из G вершину x и добавим ребра $(x_2, x_3); (x_3, x_4), \dots, (x_{\ell-1}, x_\ell)$. Новый граф G' содержит $t-1$ помеченных ребер, следовательно является $(2, t)$ -квазираскрашиваемым. После раскраски G' можно восстановить G окрасив при этом x в цвет, отличный от цвета x_1 . Очевидно полученная раскраска является $(2, t+1)$ -квазираскраской для G . Полученное противоречие доказывает справедливость Леммы 1.

Нетрудно убедиться, что справедлива также следующая:

Теорема 1. Плоский гиперграф H бихроматичен, если H' бихрома-

тичен и для любого ребра $e \in E$, для которого $|e \cap X'| \neq \emptyset$, имеет место $|e| \geq m_2(H) + 1$.

Теорема 2. Плоский гиперграф H бихроматичен, если H' бихроматичен и для любого ребра $e \in E$ имеет место $|e| \geq |e \cap X'| + 3$, кроме быть может тех ребер, которые содержат хотя бы две вершины x_i и x_j для которых $d_{H'}(x_i, x_j)$ нечетное число.

Пусть $G = (Y, U)$ произвольный плоский граф с некоторыми помеченными ребрами. $G' = (Y', U')$ обозначает граф, порожденный помеченными ребрами графа G и им инцидентными вершинами. Для доказательства теоремы 2 достаточно показать справедливость следующей леммы.

Лемма 2. Вершины любого плоского графа с некоторыми помеченными ребрами, которые не составляют нечетных циклов, и без 2-граней можно окрасить двумя цветами так, чтобы концы помеченных ребер были окрашены различно, а каждая грань Γ - содержала хотя бы две разноцветные вершины, где

$$|\Gamma| \geq |\Gamma \cap Y'| + 3 \quad /1/$$

Доказательство. Предположим лемма не верна и G класс плоских графов с минимальными числом вершин, удовлетворяющих условиям леммы, но не допускающие такой раскраски. Пусть граф $G \in G$ содержит минимальное число ребер. Так же, как и в лемме 1 можно убедиться, что существует вершина $x \in G$, которой инцидентно одно помеченное ребро. Пусть $\rho(x) = \ell$. Очевидно $\ell > 2$. Без потери общности можно считать, что грани $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{\ell-2}$ удовлетворяют условию /1/. Удалим из G ребра $(x, x_2), (x, x_3), \dots, (x, x_\ell)$ и добавим ребра $(x_2, x_3), (x_3, x_4), \dots, (x_{\ell-1}, x_\ell)$.
/рис. 4./ Новый полученный граф G_1 содержит на одно ребро меньше чем G , следовательно раскрашивается двумя цветами так, чтобы концы помеченных ребер были окрашены различно, а каждая грань, удовлетворяющая условию /1/, содержала хотя бы две разноцветные вершины. Так как грани $\Gamma'_i (1 \leq i \leq \ell-2)$ в графе G_1

удовлетворяют условию /1/, то раскраска графа G_1 является раскраской и для G . Полученное противоречие доказывает справедливость леммы 2.

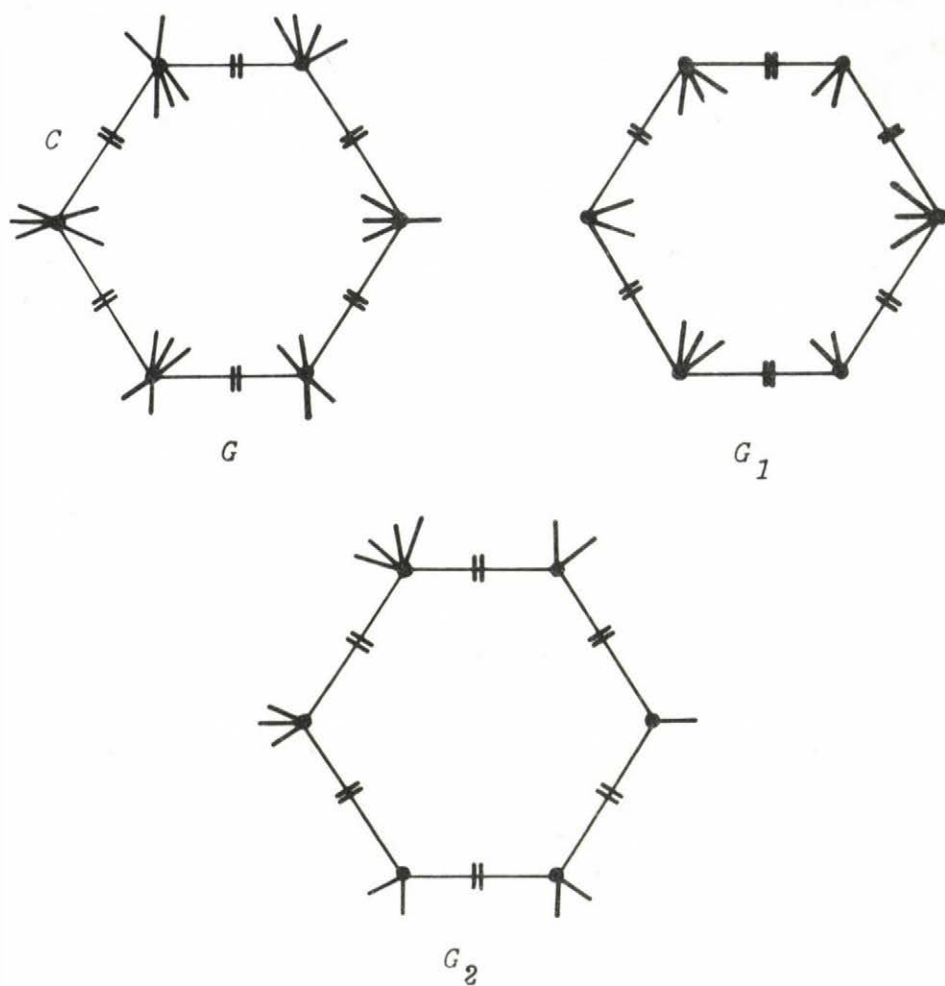


Рис 1.

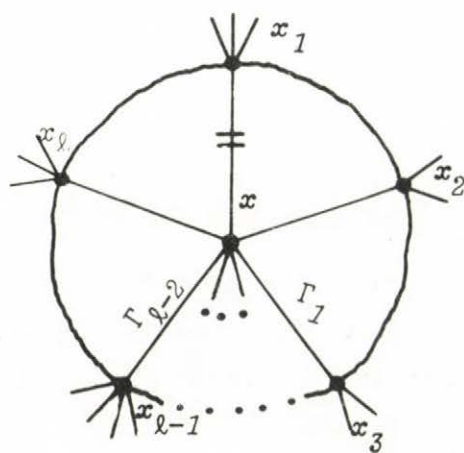


Рис. 2.

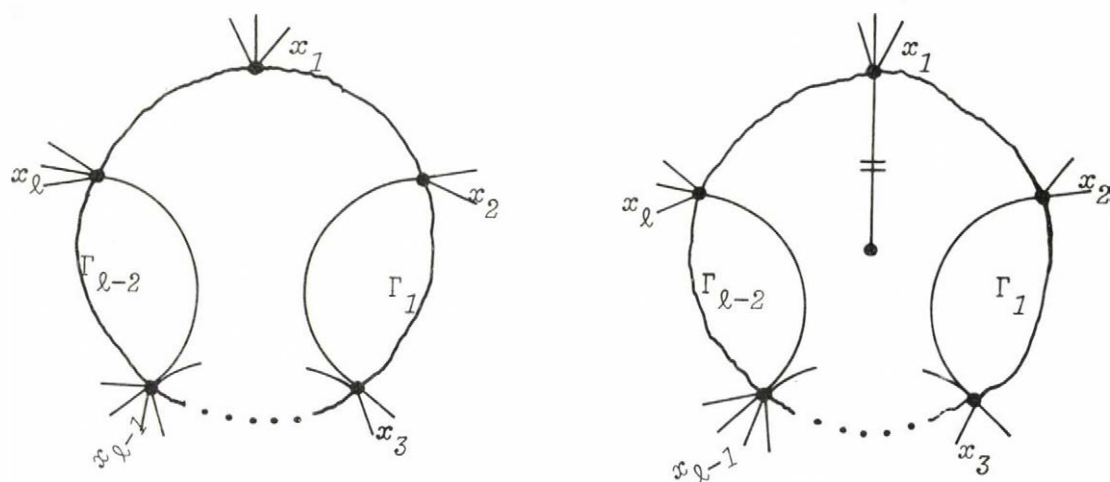


Рис. 3.

Summary

TWO THEOREMS ON PLANAR BICHROMATIC HYPERGRAPHS

S.G. Indjeyan

Let $H=(X,E)$ be a planar hypergraph. By $H'=(X',E')$ denote a graph consisting of the edges of degree 2 of H , by $m_i(H)$ - the number of edges of degree i , and $d_{H'}(x_i, x_j)$ - the distance between vertices x_i and x_j in H' .

In this paper it is proved.

Theorem 1. The planar hypergraph H is bichromatic, if H' is bichromatic and $|e| \geq m_2(H)+1$ for every edge $e \in H$.

Theorem 2. The planar hypergraph H is bichromatic, if H' is bichromatic and $|e| \geq |e \cap X'|+3$ for every edge $e \in H$, besides, perhaps, of edges, which contains at least two vertices x_i and x_j for which $d_{H'}(x_i, x_j)$ is odd.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. C. Berge: Graphes et Hypergraphes, Paris, Dunod, 1970.
2. А.А. Зыков: УМН, 6, 1974.
3. Ф.Харари: Теория графов, Мир, 1973.
4. М.И. Бурштейн: Сообщения АН Груз. ССР., 75, № 1, 1974.

n-КАРКАСНЫЕ И ГИПО- n-КАРКАСНЫЕ ГРАФЫ

Ж.Г. Никогосян

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в книге [1]. Пусть $V(G)$ обозначает множество вершин графа G , $X(G)$ — множество ребер, $\alpha(G)$ — число вершинной независимости, $k(G)$ — вершинную связность, $d(v)$ — степень вершины $v \in V(G)$ и $N(v)$ — множество вершин, смежные с вершиной v .

Каркасом графа G называется максимальный /по ребрам/ его подграф, не имеющий циклов. Вершина каркаса называется висячей, если она в данном каркасе имеет степень 1. Для графа G введём следующий инвариант

$$o(G) = \min_T |F(T)|,$$

где $F(T)$ — множество висячих вершин каркаса T графа G . Очевидно, что $o(G) \geq 2$. Однако, для корректности дальнейших формулировок, мы включим равенство $o(G)=1$ и будем полагать, что оно имеет место тогда и только тогда, когда G — гамильтонов, т.е. когда существует цикл, проходящий через все вершины графа G по одному разу.

Граф G назовем n -каркасным, где $n \geq 1$ — целое число, если $o(G) \leq n$. Граф G назовем гипо- n -каркасным ($n \geq 1$), если $o(G) > n$, но для любой вершины $v \in V(G)$ имеет место $o(G-v) \leq n$. В литературе 1-каркасные, гипо- 1-каркасные и гипо- 2-каркасные графы известны под названием гамильтонов, гипогамильтонов и гипопроходимый соответственно.

В работах [2] и [3] доказано, что при $n=1,2$ наименьшее количество вершин /соответственно ребер, граней/ 3-связного планарного графа, который не является n -каркасным, равно $8+3n$ /соответственно $12+6n, 6+3n$ /, а для максимального планарного

графа /т.е. для триангуляции/ - $(8+3n)$ /соответственно $18+9n$, $12+6n$ / .

В работах [4 - 9] доказаны следующие результаты:

1. Граф Петерсена является единственным гипогамильтоновым графом порядка $p \leq 10$;
2. Не существует гипогамильтоновых графов порядка 11 и 12;
3. Для всех чисел $p \geq 13$, кроме, возможно, $p=14, 17$, существует гипогамильтоновые графы порядка p ;
4. Для чисел $p=34, 37, 39, 40$ и для всех чисел $p \geq 42$ существует гипопроходимые графы порядка p .

В настоящей работе для любого $n \geq 3$ мы построим минимальные /по вершинам, ребрам и граням независимо/ 3-связные плоские графы, не являющиеся n -каркасными, в результате которого получим верхние оценки для чисел $\alpha(G)$ и $\alpha(G)$. Будем построить также бесконечный класс типо- n -каркасных графов для любого $n \geq 3$.

Пусть G является 3-связным плоским графом, расположенным на плоскости Π . Под расщеплением грани F графа G будем понимать добавление нового ребра $v_1 v_2$ поперек грани F , где v_1 и v_2 являются точками различных ребер грани F . Обратная операция расщепления грани есть устранение ребер. Ребро e в 3-связном графе G называется устранимым, если после удаления ребра e полученный граф $G(e)=G-e$ гомоморфен некоторому 3-связному графу.

Пусть $C=v_1 v_2 \dots v_m v_1$ - произвольный простой цикл плоского графа G , где последовательность вершин на цикле G взята по направлению часовой стрелки. Через $C(v_i, v_j)$ обозначим цепь, идущую от вершины v_i и v_j через ребра цикла C по направлению часовой стрелки. Плоскость Π циклом C разбивается на некоторые три множества точек $A_1(C)$, $A_2(C)$, $A_3(C)$, где $A_1(C)$ - множество точек замкнутой линии C , $A_2(C)$ - множество внутренних и $A_3(C)$ - множество внешних точек области, ограничен-

ной циклом C . Пусть $A_0(C) = A_1(C) \cup A_2(C)$.

Через $\langle A_0(C) \rangle$ обозначим максимальный подграф плоского графа G , все ребра и вершины которого полностью лежат в области $A_0(C)$. Вершину $v \in V(C)$ назовем открытой для цикла C или для области $A_0(C)$, если v инцидентна некоторому ребру, которое имеет общую точку с областью $A_3(C)$. Если вершина $v \in V(C)$ не является открытой, то ее назовем закрытой. Множество открытых вершин цикла C обозначим через $i(C)$ или иногда через $i(A_0(C))$. В дальнейшем в любой записи вида $i(C) = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$ будем предполагать, что последовательность $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ на цикле C также определена по направлению часовой стрелки.

Простой цикл C /или область $A_0(C)$ / назовем устранимым, если граф, полученный из G стягиванием подграфа $\langle A_0(C) \rangle$ в одновершинный граф, является 3-связным и не содержит петель и кратных ребер /его будем обозначать через $G - A_0(C)$ /. Всюду под грантю F будем понимать ее граничный цикл.

В работе [10] доказана следующая лемма.

Лемма 1⁰. Граф G является 1-скелетом тогда и только тогда, когда он планарен и 3-связен.

Напомним, что каждому многограннику соответствует некоторый планарный граф, который называется 1-скелетом. Нам нужны также следующие три результата [2-3]:

Лемма 2⁰. Если $G(G \neq K_4)$ является плоским 1-скелетом, то всякая его треугольная грань F имеет устранимое ребро.

Лемма 3⁰. Если $G(G \neq K_4)$ является плоским 1-скелетом, F - треугольная грань, а v - вершина грани F со степенью 3, то ребро грани F , не содержащее v , является устранимым.

Лемма 4⁰. Если $G(G \neq K_4)$ является плоским негаметтоновым 1-скелетом, то всякая его треугольная грань имеет ребро e та-

кое, что граф $G(e)$ также негамильтонов.

Лемма 1. Если $G(G \neq K_4)$ является плоским 1-скелетом, то всякая его треугольная грань имеет ребро e такое, что $o(G(e)) \geq o(G)$.

Лемма 2. Если $G(G \neq K_4)$ является плоским 1-скелетом, если $F = v_1 v_2 v_3 v_1$ - его треугольная грань и $d(v_1) = 3$, то $o(G(e)) \geq o(G)$, где $e = v_2 v_3$.

Доказательства леммы 1 и 2 можно провести аналогично доказательству леммы 3 из работы [2].

Лемма 3. Простой цикл C плоского 1-скелета G является удаляемым тогда и только тогда, когда для произвольного простого цикла C' графа G , удовлетворяющего условию $A_0(C) \cap A_2(C') = \emptyset$, имеет место неравенство

$$|i(C') \cap A_1(C)| \leq |i(C')| - 2.$$

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Через C^* обозначим граничный цикл грани, которая порождается в графе G при удалении множества вершин $v(G) \cap A_0(C)$. Нетрудно проверить, что C^* является простым циклом. Стянем подграф $\langle A_0(C) \rangle$ в одновершинный граф z . Граф $G^* = G - A_0(C)$ не содержит петель и кратных ребер, так как иначе нарушается условие леммы. Для доказательства леммы достаточно доказать, что $K(G^*) \geq 3$. Допустим обратное, т.е.

$K(G^*) \leq 2$. Тогда существуют вершины $v_1, v_2 \in v(G^*)$ такие, что граф $(G^* - v_1) - v_2$ не связан. Если $v_1 \neq z$ и $v_2 \neq z$, то $K((G - v_1) - v_2) = 0$ т.е. $K(G) \leq 2$, что невозможно. Если же $v_1 = z$ или $v_2 = z$ / пусть $v_1 = z$ / , то хотя бы одна из компонент связности графа $(G^* - v_1) - v_2$ не пересекается с циклом C^* и, следовательно, $K(G - v_2) = 0$, т.е. $K(G) \leq 1$, что также возможно. Полученные противоречия доказывают лемму.

Из леммы 3 непосредственно следует:

Следствие 1. Если G является плоским 1-скелетом и не имеет цикла с тремя открытыми вершинами, то все грани графа G являются устранимыми.

Для $t = 3, 4, 5$ цикла C плоского графа G назовем специальным t -циклом, если имеют место следующие четыре условия

1. $|i(C)| = t$
2. Область $A_0(C)$ не является гранью графа G ,
3. Если $t = 5$, то $\langle A_0(C) \rangle \neq L_1$, $\langle A_0(C) \rangle \neq L_2$ /рис. 1, а/, б/,
здесь и в последующих рисунках также/ с кружечками обозначены вершины /возможно не все/, которым при изоморфизме должны соответствовать закрытые вершины рассматриваемого цикла C /.
4. Если C' - произвольный цикл, для которого $A_0(C') \subset A_0(C)$, то $|i(C')| \geq t$ и C' не является специальным t -циклом.

Следствие 2. Если C является специальным 3-циклом плоского 1-скелета G , не имеющего треугольных граней, то все грани, лежащие в области $A_0(C)$, являются устранимыми.

Доказательство. Допустим обратное, т.е. грань F лежит в области $A_0(C)$ и не является устранимой. По лемме 3 для некоторого цикла C' , удовлетворяющего условию $A_0(F) \cap A_0(C') = \emptyset$, имеет место неравенство $|i(C') \cap A_1(F)| \geq |i(C')| - 1$. Тогда нетрудно проверить, что область $A_0(C') \cap A_0(C)$ имеет не более трех открытых вершин, что противоречит определению цикла C .

Доказательство следующей леммы не представляет трудности.

Лемма 4. Если в графе G имеет место $\alpha(G) \geq (|V(G)| + r)/2$, где $r \geq 1$, то $\phi(G) > r$.

Теорема 1. Наименьшее число вершин /соответственно ребер, граней/ планарного 3-связного графа, который не является n -каркасным ($n \geq 1$), есть $8 + 3n$ /соответственно $12 + 6n$, $6 + 3n$ /.

Доказательство. Докажем теорему методом индукции по числу n . При $n=1$ утверждение теоремы доказано в работе [2]. Допустим, что утверждение теоремы верно для всех $n \leq s-1 (s \geq 2)$ и докажем его для случая $n=s$.

Планарный 3-связный граф G_s /рис. 2./ имеет $8+3s$ вершин, $12+6s$ ребер, и $6+3s$ граней. Очевидно, что $\alpha(G_s) \geq [(8+3s)+s]/2$. Тогда по лемме 4 имеем $o(G_s) > s$.

Пусть G - произвольный 1-скелет, имеющий $v(G)$ вершин, $e(G)$ ребер и $f(G)$ граней, и пусть выполняется хотя бы одно из следующих неравенств

$$v(G) \leq 7+3s, e(G) \leq 11+6s, f(G) \leq 5+3s.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $o(G) \leq s$.

Уложим граф G на плоскости Π . По лемме 1 можем предполагать, что G не имеет треугольных граней.

Случай 1/. Граф G содержит некоторый цикл C , для которого $\langle A_0(C) \rangle \cong R_1$ /рис. 3, а/, где F_1 и F_2 - непересекающиеся по ребрам четырехугольные грани, а F_0 - устранимая грань/.

Рассмотрим граф $G - A_0(F_0) = G^1$. Очевидно, что $o(G^1) \geq o(G) - 1$. По лемме 1 треугольная грань F_1 в графе G^1 имеет такое устранимое ребро, что $o(G^2) \geq o(G^1)$, где $G^2 = G^1 - e_1$. Аналогично, грань F_2 в графе G^2 имеет устранимое ребро e_2 такое, что $o(G^3) \geq o(G^2)$, где $G^3 = G^2 - e_2$. Таким образом

$$o(G^3) \geq o(G) - 1, v(G^3) \leq v(G) - 3, e(G^3) \leq e(G) - 6, f(G^3) \leq f(G) - 3.$$

Отсюда следует справедливость хотя бы одного из следующих неравенств

$$v(G^3) \leq 7+3(s-1), e(G^3) \leq 11+6(s-1), f(G^3) \leq 5+3(s-1).$$

По индуктивному предположению имеем $o(G^3) \leq s-1$, откуда $o(G) \leq o(G^3) + 1 \leq s$.

Случай 2/. Граф G содержит некоторый цикл C , для которого $\langle \mathcal{A}_0(C) \rangle \cong R_2$ /рис. 3,б/, где F_1 и F_2 - четырехугольные грани с общим ребром, а F_0 - устранимая грань.

По лемме 2 ребро e /рис. 3,б/ является устранимым для графа $G^1 = G - \mathcal{A}_0(F_0)$ и имеет место $o(G^1 - e) \geq o(G)$. Так как в графе G^1 удаление ребра e сохраняет треугольник F_2 , то этот случай сводится к случаю 1/.

Случай 3/. Граф G содержит некоторый цикл C , для которого $\langle \mathcal{A}_0(C) \rangle \cong R_3$ /рис. 3,в/, где F_0 - четырехугольная грань F_1 и F_2 - грани, а $\mathcal{A}_0(F_1) \cup \mathcal{A}_0(F_2)$ - устранимая область.

Очевидно, что $o(G^1) \geq o(G) - 1$, где $G^1 = G - (\mathcal{A}_0(F_1) \cup \mathcal{A}_0(F_2))$. По лемме 1 грань F_0 в графе G^1 имеет такое устранимое ребро e , что $o(G^2) \geq o(G^1)$, где $G^2 = G^1 - e$. По индуктивному предположению имеем $o(G^2) \leq s - 1$, т.е. $o(G) \leq s$.

Случай 4/. Граф G содержит некоторый цикл C , для которого $\langle \mathcal{A}_0(C) \rangle \cong R_4$ /рис. 3,г/, где F_0 - пятиугольная грань, F_1 и F_2 - грани, а $\mathcal{A}_0(F_1) \cup \mathcal{A}_0(F_2)$ - устранимая область/.

Очевидно, что $o(G^1) \geq o(G) - 1$, где $G^1 = G - (\mathcal{A}_0(F_1) \cup \mathcal{A}_0(F_2))$. По лемме 1 грань F_0 в графе G^1 имеет такое устранимое ребро e , что $o(G^2) \geq o(G^1)$, где $G^2 = G^1 - e$. По индуктивному предположению имеем $o(G^2) \leq s - 1$, т.е. $o(G) \leq s$.

Случай 5/. Граф G содержит некоторый цикл C , для которого $\langle \mathcal{A}_0(C) \rangle \cong R_5$ /рис. 3,д/, где F_0 , F_1 и F_2 - грани, а $\mathcal{A}_0(F_0) \cup \mathcal{A}_0(F_1) \cup \mathcal{A}_0(F_2)$ - устранимая область/.

Для графа $G^1 = G - (\mathcal{A}_0(F_0) \cup \mathcal{A}_0(F_1) \cup \mathcal{A}_0(F_2))$ очевидно имеет место $o(G^1) \geq o(G) - 1$. По индуктивному предположению имеем $o(G^1) \leq s - 1$, т.е. $o(G) \leq s$.

Случай 6/. Случаи 1/ - 5/ не имеют место.

Допустим, что G содержит некоторый специальный 3-цикл C_0 . Пусть $i(C_0) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Согласно следствию 2 все грани области $A_0(C_0)$ являются устранимыми. Очевидно, что в области $A_0(C_0)$ существует некоторая грань F^1 , которая имеет общее ребро с циклом C_0 и удовлетворяет условию $A_0(F^1) \cap i(C_0) \neq \emptyset$. Через C_0^1 обозначим граничный цикл области $A_0(C_0) \setminus A_0(F^1)$. Если $|A_0(F^1) \cap i(C_0)| \geq 2$, то $|i(C_0^1)| \leq 3$, что противоречит определению цикла C_0 . Пусть $|A_0(F^1) \cap i(C_0)| = 1$, т.е. $|i(C_0^1)| = 4$. Область $A_0(C_0^1)$ не является гранью, так как иначе F^1 есть треугольник. Поэтому область $A_0(C_0^1)$ содержит некоторый специальный 4-цикл C_1 . Обозначим $i(C_1) = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$. Пусть $\langle A_0(C_1) \rangle \cong L_3$ /рис. 1, в/. Если хотя бы одна из цепей $C_1(\beta_1, \beta_2), C_1(\beta_3, \beta_4)$ проходит через границу некоторой грани F из области $A_0(C_0)$, то очевидно, что $\langle A_0(F) \cup A_0(F_1) \cup A_0(F_2) \rangle \cong R_2$ /случай 2//.

Если же обе цепи $C_1(\beta_3, \beta_4), C_1(\beta_2, \beta_1)$ лежат на цикле C_0 , то очевидно, что хотя бы одна из цепей $C_1(\beta_2, \beta_3), C_1(\beta_4, \beta_1)$ отсекает из области $A_0(C_1)$ некоторый цикл C с тремя открытыми вершинами, что невозможно.

Пусть $\langle A_0(C_1) \rangle \not\cong L_3$. Очевидно, что в области $A_0(C_1)$ существует некоторая грань F^2 , которая имеет общее ребро с циклом C_1 и удовлетворяет условию $A_0(F^2) \cap i(C_1) \neq \emptyset$. Если $|A_0(F^2) \cap i(C_1)| \geq 2$, то $|i(A_0(C_1) \setminus A_0(F^2))| \leq 4$, откуда следует, что область $A_0(C_1) \setminus A_0(F^2)$ является четырехугольной гранью и, следовательно, $\langle A_0(C_1) \rangle \cong L_3$ /случай 2//. Пусть $|A_0(F^2) \cap i(C_1)| \leq 1$. Без потери общности можем предполагать, что $A_0(F^2) \cap i(C_1) = \{\beta_1\}$. Грань F^2 не имеет общих вершин с цепью $C_1(\beta_2, \beta_4)$, так как иначе в $A_0(C_1)$ существует цикл с тремя открытыми вершинами. Поэтому $|i(A_0(C_1) \setminus A_0(F^2))| = 5$. Если область $A_0(C_1)$ не содержит специального 5-цикла, то по определению граф $\langle A_0(C_1) \setminus A_0(F^2) \rangle$ изоморфен L_1 или L_2 , откуда следует, что $\langle A_0(C_1) \rangle \cong R_2$ /случай 2//. Пусть $A_0(C_1)$ содержит некоторый специальный 5-цикл.

Все остальные случаи:

Случай 6.1/. Область $\mathcal{A}_0(C_1)$ содержит специальный 5-цикл,

Случай 6.2/. Граф G не имеет специального 3-цикла,

Случай 6.2.1/. Граф G имеет специальный 4 или 5-цикл,

Случай 6.2.2/. Граф G не имеет специального i -цикла для всех $i = 3, 4, 5$,

сводятся к случаям 1/ - 5/. Теорема доказана.

Дополнив граф G_s /рис. 2/ до триангуляции G'_s путем добавления следующих ребер

$$a_0 c_i, b_0 c_i \ (i=\overline{1, s+2}), a_0 b_0, c_j c_{j+1} \ (j=\overline{1, s+1}).$$

Очевидно, что

$$\alpha(G'_s) \geq 2s+4 = (v(G_s) + s) / 2.$$

Тогда из леммы 4 и из теоремы 1 следует

Теорема 2. Наименьшее число вершин /соответственно ребер, граней/ триангуляции, которая не является n -каркасным / $n \geq 1$ /, есть $8+3n$ /соответственно $18+9n, 12+6n$ /.

Теорема 3. Если G является планарным 3-связным графом, то

$$o(G) \leq \min \left\{ \frac{v(G)-5}{3}, \frac{e(G)-6}{6}, \frac{f(G)-3}{3} \right\}$$

Доказательство. Пусть $v(G) = \alpha + 3n$, $e(G) = \beta + 6n$, $f(G) = \gamma + 3n$, где $5 \leq \alpha \leq 7$, $6 \leq \beta \leq 11$, $3 \leq \gamma \leq 5$. Тогда по теореме 1 имеем следующие неравенства

$$o(G) \leq n = (v(G) - \alpha) / 3 \leq (v(G) - 5) / 3,$$

$$o(G) \leq n = (e(G) - \beta) / 6 \leq (e(G) - 6) / 6,$$

$$o(G) \leq n = (f(G) - \gamma) / 3 \leq (f(G) - 3) / 3,$$

откуда

$$o(G) \leq \min \{ (v(G) - 5) / 3, (e(G) - 6) / 6, (f(G) - 3) / 3 \}.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Если G является $v \geq 4$ вершинным планарным 3-связным графом, то

$$\alpha(G) \leq \left\lceil \frac{2}{3}(v-2) \right\rceil.$$

Доказательство. Для $v=4,5$ теорема очевидна. Для $v=6,7,8$ все 3-связные графы при $\alpha(G) > \lceil 2(v-2)/3 \rceil$ не являются планарными. Допустим, что для некоторого $v \geq 9$ вершинного 1-скелета G имеет место неравенство $\alpha(G) \geq \lceil 2(v-2)/3 \rceil + 1$. Если $v=8+3r$, где $r \geq 1$ - целое число, то $\alpha(G) \geq (v+r+2)/3$. Согласно лемме 4 имеем $\alpha(G) > r+2$. Следовательно, по теореме 1 имеет место неравенство $v \geq 8+3(r+2)$, что невозможно. При $v=7+3r$ и $v=6+3r$ рассуждения можно провести аналогично случаю $v=8+3r$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь некоторый гипогамильтонов граф G . Пусть вершина $x \in V(G)$ имеет степень 3, а множество $N(x) = \{y_1, y_2, y_3\}$ состоит из попарно несмежных вершин /все известные нам гипогамильтоновые графы имеют хотя бы одну вершину, обладающую этим свойством/. Граф $H = G - x$ обладает следующими свойствами, доказательства которых не представляет трудности:

А. Ни для каких вершин y_i и y_j из множества $\{y_1, y_2, y_3\}$ граф H не имеет гамильтоновой цепи, соединяющей y_i и y_j .

Б. Для каждой вершины $v \in V(H)$ существуют вершины y_i и y_j из множества $\{y_1, y_2, y_3\}$ и существует гамильтоновая цепь в графе $H - v$, соединяющая y_i и y_j .

Пусть $G_1^1, G_2^1, \dots, G_{2n}^1$ - гипогамильтоновые графы, где $n \geq 2$, не имеющие общих вершин. Для любого $i \in \overline{1, 2n}$ рассмотрим вершину $x_i \in V(G_i^1)$, имеющую степень 3, для которой множество $N(x_i) = \{y_i^1, y_i^2, y_i^3\}$ состоит из попарно несмежных вершин. Обозначим $H_i = G_i^1 - x_i$, $i \in \overline{1, 2n}$. Построим граф /обозначим его через D_n / посредством объединения графов H_1, H_2, \dots, H_{2n} , отождествляя при этом каждую вершину с вершиной y_{2i}^1 при $i \in \overline{1, n}$: вершины, полученные при указанном отождествлении, обозначим через

z_i при $i=\overline{1,n}$. Добавим в графе D_n новые ребра $y_{2n}^2 y_1^2, y_{2n}^3 y_1^3, y_{2i}^2 y_{2i+1}^2, y_{2i}^3 y_{2i+1}^3, i=\overline{1,n-1}$.

в результате которого получим некоторый граф G_n . Очевидно, что конструкция графа G_n для $n=2$ совпадает с конструкцией Томассена [8, рис. 2].

Лемма 5. Граф G_n при любом $n \geq 2$ является гипо- n -каркасным.

Доказательство. Докажем лемму методом индукции по числу n .

Для $n=2$ гипо-2-каркасность графа G_2 доказана в работе 8.

Допустим, что лемма верна для всех графов G_2, G_3, \dots, G_{n-1} ,

где $n \geq 3$, и докажем, что граф G_n также - гипо- n -каркасный.

Сначала покажем, что для произвольного каркаса T_0 графа G_n

имеет место $|F(T_0)| > n$. Обозначим через Ω_1 граф, получен-

ный из $H_1 \cup H_{2n}$ посредством добавления ребер $y_{1,2n-1}^2, y_{1,2n}^3$.

Через Ω_2 обозначим граф, полученный из графа Ω_1 посред-

ством добавления всевозможных ребер $y_{2i,2i+1}^2, y_{2i,2i+1}^3$ при

$i=\overline{1,n-1}$. Пусть $T_0(x,y)$ обозначает цепь графа G_n , соеди-

няющая вершины x и y графа G через ребра каркаса T_0 . Через

$T_0(G')$, где $G' \subseteq G$, будем обозначать часть каркаса T_0 , ле-

жащую в подграфе G' . Введем одно вспомогательное понятие. Вер-

шину $z_i \in G_n, i \in \overline{1,n}$ назовем односторонней в графе G_n , если

все ребра, инцидентные вершине z_i и принадлежащие каркасу T_0 ,

лежат либо все одновременно в H_{2i-1} , либо все одновременно в

H_{2i} : если же вершина z_i не является односторонней, то назо-

вем ее двусторонней. Граф G_n не может иметь более одной одно-

сторонней вершины, так как иначе каркас T_0 был бы несвязным.

Так как $n \geq 3$, то без потери общности можем предполагать,

что вершины z_1 и z_n - двусторонние и $T_0/z_1, z_n \subseteq \Omega_1$. Отождеств-

ление вершины z_1 и z_n , после чего граф Ω_2 превратится в

G_{n-1} . Так как в графе G_n имеет место $T_0/z_1, z_n \subseteq \Omega_1$, то

часть $T_1 = T_0/G_{n-1}$ каркаса T_0 , лежащая в G_{n-1} , сама является

каркасом для графа G_{n-1} . По индуктивному предположению

$|F(T_1)| \geq n$. В графе G_n подграф T_1 состоит из некоторых

двух компонент связности T_1^1, T_1^2 , причем имеет место

$T_1^1 \cup T_1^2 = T_0(\Omega_2)$. Нетрудно заметить, что граф $T_0(z_1, z_n) \cup$

$U_{T_0}(Q_2)=T_2$ связан. Из двусторонности вершин z_1 и z_n следует $|F(T_2)|=|F(T_1)| \geq n$. Очевидно, что

$$T_0(z_1, z_n) = T_0(z_n, y_{2n}^3) \cup y_{1y_{2n}}^3 \cup T_0(y_1^3, z_1).$$

По свойству А существует вершина $v \in V(Q_1)$ такая, что $v \notin T_0(z_1, z_n)$, следовательно, $|F(T_0)| > |F(T_2)| \geq n$.

Докажем теперь, что если x - произвольная вершина графа G_n то граф $G_n - x$ имеет каркас T такой, что $|F(T)| = n$. Без потери общности можем предполагать, что $x \notin V(Q_1)$. отождествим вершины z_1 и z_n , обозначая полученную при этом вершину через z_1 , после чего граф Q_2 превратится в G_{n-1} . Так как $x \in V(G_{n-1})$, то по индуктивному предположению граф $G_{n-1} - x$ имеет каркас T_3 такой, что $|F(T_3)| = n-1$. Рассмотрим следующие случаи:

Случай 1/. Вершина $z_1 \in V(G_{n-1} - x)$ - двусторонняя.

В графе G_n подграф T_3 состоит из некоторых компонент связности T_3^1 и T_3^2 . Пусть p_1 - гамильтонова цепь графа $H_1 - y_1^3$, а p_2 - гамильтонова цепь графа $H_{2n} - y_{2n}^3$ /см. свойства Б/, соединяющие вершины z_1 и y_1^2, y_{2n}^2 и z_n соответственно и пусть $p_0 = p_1 \cup p_2 \cup y_{1y_{2n}}^2$. Очевидно, что подграф $T_4 = p_0 \cup T_3^1 \cup T_3^2$ связан. Так как в графе $G_{n-1} - x$ вершина $z_1 = z_n$ является двусторонней, то $|F(T_4)| = |F(T_3)| = n-1$. Пусть $y_1^3 v_0 \in E(H_1)$, где v_0 - некоторая вершина графа H_1 . Нетрудно заметить, что подграф $T = T_4 \cup y_{1y_{2n}}^3 \cup y_{1v_0}^3$ является каркасом для графа $G_n - x$ и имеет место $|F(T)| = n$.

Случай 2/. Вершина $z_1 \in V(G_{n-1} - x)$ - односторонняя.

Очевидно, что $x \neq z_i, i = \overline{1, n}$, так как иначе каркас T_3 был бы несвязным. Тогда один из графов $H_2 \cup H_3, H_{2n} \cup H_{2n-1}$, скажем $H_2 \cup H_3$, не содержит вершины x . отождествим вершины z_1 и z_2 , обозначая новую вершину через z_2 . Легко проверить, что в полученном новом графе G_{n-1} существует некоторый каркас T_5 ,

для которого вершина z_2 является двусторонней и имеет место $|F(T_5)| = n-1$, что приводит нас к случаю 1/. Лемма доказана.

Пусть $G_i^1, i=\overline{1,2n}$ - гипогамильтоновы графы порядка v_i , где $n \geq 2$. С помощью этих графов построим гипо- n -каркасный граф G_n вышеуказанным методом. Очевидно, что $|V(G_n)| = \sum_{i=1}^{2n} v_i - 3n$. Если в G_n все подграфы $G_i^1, i=\overline{1,2n}$, заменить графом Петерсена, то минимальный /по вершинам/ гипо- n -каркасный граф G_n , полученный этим путем, будет иметь $|V(G_n)| = 17n$ вершин. Если же в графе G_n вместо подграфов $G_i^1, i=\overline{1,2n}$, рассмотрим всевозможные гипогамильтоновы графы, то очевидно получим

Теорема 5. Для всех чисел $v \geq 17n$ / $n \geq 2$ / кроме, может быть, $v = 17n+1, 17n+2, 17n+4n, 17n+7$, существует гипо- n -каркасные графы порядка v .

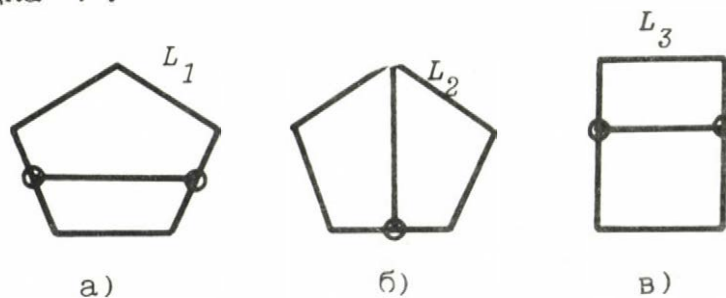


Рис. 1.

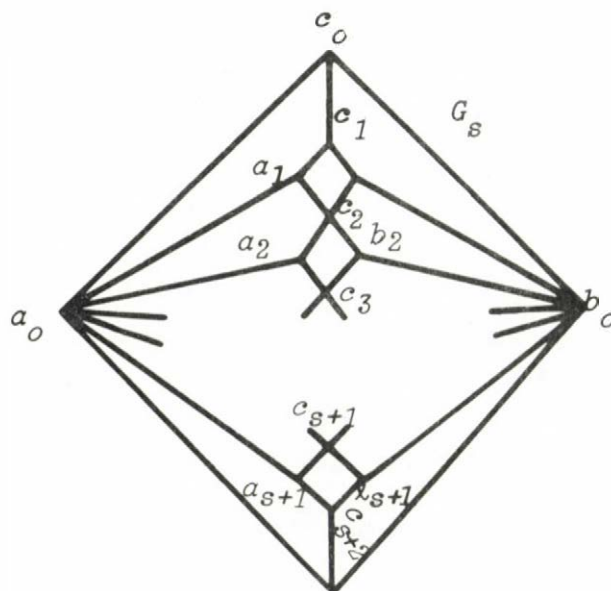


Рис. 2.

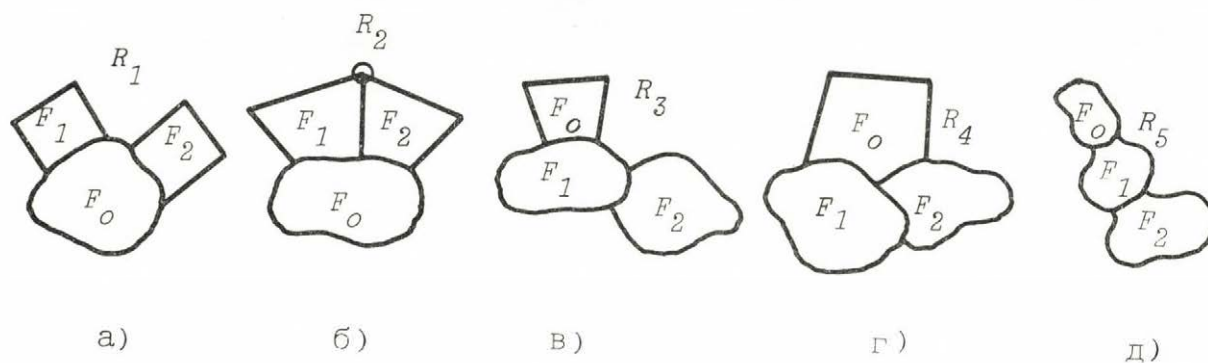


Рис. 3.

SUMMARY

n-SPANNING AND HYPO-n-SPANNING GRAPHS

G.G. Nicoghossian

Let $o(\mathcal{G}) = \min_T |F(T)|$, where $F(T)$ denotes the set of terminal vertices of a spanning tree of a graph \mathcal{G} . Suppose that $o(\mathcal{G})=1$ holds if and only if \mathcal{G} is hamiltonian. We shall say that \mathcal{G} is n -spanning ($n \geq 1$) if $o(\mathcal{G}) \leq n$ and hypo- n -spanning ($n \geq 1$) if $o(\mathcal{G}) > n$ but $o(\mathcal{G}-v) \leq n$ for each vertex $v \in \mathcal{G}$.

In this paper the smallest number of vertices, edges or faces of any 3-polytope, whose graph \mathcal{G} satisfies $o(\mathcal{G}) > n$ ($n \geq 1$), is determined. Similar result are found for simplicial polytopes.

As a corollary the best estimates

$$o(\mathcal{G}) \leq \min\{(v-5)/3, (e-6)/6, (f-3)/3\}, \quad \alpha(\mathcal{G}) \leq 2(v-2)/3$$

are obtained for any 3-connected planar graph \mathcal{G} with $v \geq 4$ vertices, e edges, f faces and point independence number $\alpha(\mathcal{G})$.

The existence of hypo- n -spanning graphs of order v is shown for all integers $n \geq 2$ and $v \geq 17n$, besides, perhaps, $v=17n+1, 17n+2, 17n+4, 17n+7$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ф. Харари: Теория графов, изд. "Мир", 1973.
2. D. Barnette and E. Jucovic, Hamiltonian circuits on 3-polytopes, "J. Combin Theory", 9, N1, 54-59, /1970/
3. P.R. Goodey, Hamiltonian paths on 3-polytopes, "J. Combin. Theory", 1972, N12, N2, 143-152.
4. T. Gaudin, J.C. Herz and P. Rossi, Solution du problème No.29, Rev. Française informat. recherche operationelle 8 /1964/ 214-218.
5. J.C. Herz, J.J. Duby and F. Vigué, Recherche systématique, des graphes hypohamiltonian in: P. Rosenstiehl/ed/, Theorie des graphes /Dunod, Paris, 1967,/ 153-160.
6. W.F. Lindgren, An infinite class of hypohamiltonian graphs, Am. Math. Monthly 74/1967/ 1087-1089.
7. V. Chvátal, Flip-flops in hypohamiltonian graphs, Can. Math. Bull. 16/1973/ 33-41.
8. C. Thomassen, Hypohamiltonian and hypotraceable graphs, Discrete Math. 9/1974/ 91-96.
9. J. Dojen and V. Van Diest, New families of hypohamiltonian graphs, discrete Math. 13/1975/ 225-236.
10. Steinitz and H. Rademacher, vorlesungen über die theorie der polyeder, Springer, Berlin, 1934.

АЛГОРИТМЫ ДЛЯ УПОРЯДОЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МНОЖЕСТВА
В КЛАСС ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НА ОСНОВАНИИ БИНАРНЫХ
ОТНОШЕНИЙ

К. ПАСТОР-ВАРГА, П. СОМОР

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ
ТЕХНИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ ВАН

I. Введение

Алгоритм, служащий для упорядочения элементов множества в класс эквивалентности на основании бинарных отношений и сформулированный на графы уже из литературы [1] известен. Это решение основано на знании матрицы соединения графа. Одна из задач области проектирования с помощью вычислительной машины потребовала отыскать для решения задачи алгоритмы с меньшей потребностью памяти и одновременно быстрее.

2. Формулировка задачи

Задано множество $N = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ и $R \subseteq N \times N$. Пусть определено бинарное отношение R на множестве N по следующему:

$h_i \in N$ в отношении к $h_j \in N$, в обозначении $h_i R h_j$, если $\langle h_i, h_j \rangle \in R$ т.е. $\langle h_i, h_j \rangle \in R \rightarrow h_i R h_j$. На основании отношения множество $R[N] = \{h_j | \exists h_i \in N, h_i R h_j\}$ будем называть множеством R - образов элементов множества N [2].

На основании данного отношения, истолкуем новое отношение R_E между элементами множества N :

1. пусть $h_i R_E h_j$ и $h_j R_E h_i$, если верно, либо $h_i R h_j$, либо $h_j R h_i$;
2. если $h_i R h_j$ и $h_j R h_k$, то пусть $h_i R_E h_k$ и $h_k R_E h_i$;

ва N и R . Дадим три различных алгоритма в зависимости от того, какой способ машинного представления информации выбирается.

Алгоритм А

Выбран линейно-последовательный список для размещения элементов множества N . Каждый элемент списка состоит из двух полей: из информационного поля $INFO$, содержащее, собственно говоря, элемент множества и из идентификационного поля $IDENT$ — идентификатор класса эквивалентности.

$N(i):$

$INFO$	$IDENT$
--------	---------

Элементы множества R , также расположены в линейно-последовательном списке. Элемент списка также состоит из двух полей:

первое поле $FLINK$ содержит указатель первого члена пары $\langle h_i, h_j \rangle$, второе поле $SLINK$ содержит указатель второго члена.

$R(j):$

$FLINK$	$SLINK$
---------	---------

Основная идея алгоритма: перечисление элементов списка R и по содержимому полей связи в идентификационные поля списка N записываем одинаковые идентификаторы класса. Если одно идентификационное поле уже заполнено, то и в другое поле записывается тот же самый идентификатор. Если оба поля заполнены и в них идентификаторы различны, то два уже образованных класса эквивалентности объединяются. Подробный алгоритм:

1. В каждом элементе списка N $IDENT(i) := 0$;
2. $CLASS := 0$, где $CLASS$ идентификатор актуального класса эквивалентности;
 $k := 0$, где k указатель в списке R ;
3. $k := k + 1$
Если k больше числа элементов списка R ,
то следует шаг 12;
4. Если $IDENT(FLINK(k)) = IDENT(SLINK(k))$,
то следует шаг 9;

5. Если $IDENT(FLINK(k)) < IDENT(SLINK(k))$,
то следует шаг 10;
6. Если $IDENT(SLINK(k)) = 0$,
то $IDENT(SLINK(k)) := IDENT(FLINK(k))$,
и следует шаг 3;
7. $from := IDENT(FLINK(k))$
 $to := IDENT(SLINK(k))$;
8. Перечислим все элементы списка H и где содержимое поля $IDENT$ равно значению $from$, там изменим содержимое поля $IDENT$ на значение to . После этого следует шаг 3;
9. Если $IDENT(FLINK(k)) = 0$,
то $CLASS := CLASS + 1$
 $IDENT(FLINK(k)) := IDENT(SLINK(k)) := CLASS$
и следует шаг 3;
10. Если $IDENT(FLINK(k)) = 0$,
то $IDENT(FLINK(k)) := IDENT(SLINK(k))$
и следует шаг 3;
11. $from := IDENT(SLINK(k))$
 $to := IDENT(FLINK(k))$
и следует шаг 8;
12. Перечислим все элементы списка H , и
если $IDENT(i) = 0$,
то $CLASS := CLASS + 1$
 $IDENT(i) := CLASS$
Обходом листа алгоритм завершен.

В результате выполнения алгоритма A в поле $IDENT$ каждого элемента списка H будет записан идентификатор класса эквивалентности, отличающийся от 0. Элементы, обладающие одинаковым идентификатором класса эквивалентности, принадлежат одному классу эквивалентности.

Алгоритм В

Элементы множества H записываются в линейно-последовательный список. Каждый элемент списка состоит из одного информационного поля $INFO$.

$H(i):$

$INFO$

Элементы множества R , также записываются в линейно-последовательный список, но теперь каждый элемент $\langle h_i, h_j \rangle$ множества, занесены подряд в два элемента списка. Один элемент списка состоит из 4 или 3 полей, в зависимости от того, что он относится к первому или второму члену пары $\langle h_i, h_j \rangle$. В каждом элементе списка, первое поле $QUAL$ — поле оценки. Содержимое его равно 1, если элемент списка относится к первому члену пары $\langle h_i, h_j \rangle$ и 0 иначе. Второе поле, информационное поле $INFO$. Третье поле, поле связи $LINK$. Четвертое поле $CYCLE$, служащее для образования кольца пар, принадлежащих одному классу эквивалентности

$R(i):$

$QUAL$	$INFO$	$LINK$	$CYCLE$
--------	--------	--------	---------

 $QUAL(i)=1;$
 $R(i+1):$

$QUAL$	$INFO$	$LINK$
--------	--------	--------

 $QUAL(i+1)=0;$

Принцип действия алгоритма следующий: элементы списка R по содержимому поля $INFO$ упорядочим в какую то логическую последовательность и с помощью поля $LINK$ элементы сцепятся, т.е. поле $LINK$ любого элемента, содержит адрес логически очередного элемента (цепь указателей). Упорядочение элементов в логическую последовательность может осуществляться, например, упорядочением в возрастающую последовательность элементов списка H . По цепи указателей обход списка R и пары элементов с одинаковым содержимым поля $INFO$ и указатели поля $CYCLE$ сцепятся в кольцо.

1. $i:=1$ где i указатель в списке R ;
 $LINK(i):=0$
 $CYCLE(i):=i;$
2. $min:=INFO(i)$
 $pointer:=i;$

3. $i := i + 1$
если i больше числа элементов списка R ,
то следует шаг I2,
иначе, если $QUAL(i) = 1$,
то $CYCLE(i) := i$;
4. если $INFO(i) < min$,
то следует шаг II;
5. $j := i$;
6. $j := j - 1$;
7. если $INFO(i) < INFO(j)$,
то следует шаг 6;
8. если $LINK(j) = 0$,
то следует шаг I0;
9. если $INFO(LINK(j)) < INFO(i)$,
то $j := LINK(j)$
и следует шаг 8;
- I0. $LINK(i) := LINK(j)$, $LINK(j) := i$
и следует шаг 3;
- II. $LINK(i) := pointer$
и следует шаг 2;
- I2. $i := 0$;
- I3. $i := i + 1$;
если i больше числа элементов списка R ,
то алгоритм завершен;
- I4. если $LINK(i) = 0$,
то следует шаг I3;
если $INFO(LINK(i)) \neq INFO(i)$
то следует шаг I3;
 $j := i$;
если $QUAL(j) = 0$,
то $j := j - 1$;
 $k := LINK(i)$;
если $QUAL(k) = 0$,

```

    to   k:=k-1;
        begin:=j;
I5.  если LINK(j)=k
    то следует шаг I3;
I6.  если LINK(j) ≠ begin,
    то   j:=LINK(j)
    и следует шаг I5 ;
I7.  aux:=LINK(k), LINK(k):=LINK(j), LINK(j):=aux,
    и следует шаг I3.

```

После выполнения алгоритма в списке R по указателям поля CYCLE сцеплены в кольцо пары элементов, принадлежащие одному классу эквивалентности. Элементы списка H, не встречающиеся ни в одном элементе списка R, образуют в отдельности классы эквивалентности.

Алгоритм С

Элементы множества H содержатся в линейном списке, упомянутом при алгоритме В ($H(i): \boxed{\text{INFO}}$). Элементы множества R заданы неявно. Алгоритм предполагает такой линейный список $Q=Q_1Q_2\dots Q_n$, в котором Q_i последовательность из элементов H.

В последовательности $Q_i=Q_i(1), Q_i(2), \dots, Q_i(l)$ элементы состоят из 4 или 3 полей как в алгоритме В таким образом, чтобы для любого i

$Q_i(1):$	QUAL	INFO	LINK	CYCLE
$Q_i(j):$	QUAL	INFO	LINK	

если $j \neq 1$.

Функция полей совпадает с функциями полей, описанных в алгоритме В за исключением поля QUAL, в котором в ходе выполнения алгоритма записываются некоторые метки.

Предположим, что Q содержит всю информацию относительно R следующим образом:

1. $Q_i(j) R Q_i(k)$

2. $Q_i(j) T_R Q_l(t) \rightarrow Q_i(j) R Q_l(t)$

где о состоятельности T_R можно решить при известности элементов списка $Q_i(j)$, $Q_i(j+1)$ и $Q_l(t)$.

Пусть будет граф $G(Q, R)$ таким, чтобы его вершинам соответствовали элементы Q . В этом графе вершины, соответствующие заданным элементам Q_i расположены по одному направленному пути (рис.1).

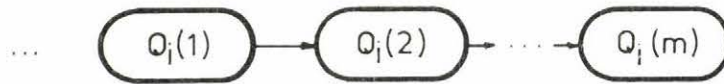


рис.1

Состоятельность $Q_i(j) T_R Q_l(t)$ отмечена в графе ребром $Q_i(j), Q_l(t)$. Упорядочение в класс эквивалентности R_E означает нахождение связного подграфа графа.

Алгоритмом производится прямой порядок обхода остовного дерева графа $G(Q, R)$ с применением стековой техники и получаются связные подграфы с объединением остовных деревьев, имеющих общие вершины. Обход без создания графа, по существу осуществляется последовательным просмотром списка Q . Элементы списка Q обрабатываются по их адресам в Q . Начальным условием алгоритма является, чтобы содержимым полей CYCLE был адрес соответствующего элемента Q .

Метки, применяемые в алгоритме:

P - элемент не содержит информацию, нужную для упорядочения в класс эквивалентности

F - элемент уже обработан

A - элемент в последовательности текущей обработки.

ADDR_i - адрес элемента $Q_i(1)$ последовательности Q_i в Q

Сам алгоритм:

1. $j := 0$;
2. $ADDR_j :=$ самый младший адрес ($j < ADDR_j$), для которого
в $Q_j(1)$ нет метки F ;
3. $ADDR_j \Rightarrow STACK$;
 $F, A \Rightarrow QUAL(ADDR_j)$;
 $j := ADDR_j$;
4. если STACK пустой,
то стереть все метки A
и следует шаг 8;
5. $STACK \Rightarrow IND$
если $Q(IND+1)$ является внутренним элементом последовательности,
то $IND+1 \Rightarrow STACK$;
6. если $P \in QUAL(IND)$,
то следует шаг 4;
7. $P \Rightarrow QUAL(IND)$
Для всех j , для которых состоятельно $Q(IND) \vdash Q_j(t)$
и $A \notin QUAL(ADDR_j)$, $ADDR_j \rightarrow STACK$, $F, A \Rightarrow QUAL(ADDR_j)$
 $\{CYCLE(ADDR_j)\} \Leftrightarrow \{CYCLE(ADDR_j)\}$
и следует шаг 3;
8. если имеется еще последовательность без метки F ,
то следует шаг 2;
9. стоп.

При описании алгоритма мы не остановились подробно на описании алгоритма обхода и стековой техники, так как их можно найти в литературах [4], [5].

4. Сравнение алгоритмов

Два главных принципа сравнения: объем памяти, потребляемый информацией для работы алгоритма и потребность времени алго-

ритма. При сравнении предположены: n - число элементов множества H , g - число элементов множества R .

Рассмотрим в начале потребность памяти алгоритмов. Для алгоритма, заданного в литературе [1] требуется знание матрицы смежности графа, следовательно потребность памяти n^2 . В случае алгоритма A , когда информация хранится в линейно-последовательном списке, потребность памяти $2(n+g)$. Для алгоритма B она $n+4g$ и для алгоритма C она $2n+3g$ (где g - число элементов списка Q). Быстроту алгоритмов выражаем через число сравнений. В случае алгоритма, применяющего матричное представление оно пропорционально $\binom{n}{2}$. Необходимое число сравнений для алгоритма A равно $g+c_1 \cdot n$, где c_1 константа. Для алгоритма B это число пропорционально $2g+g \cdot \log g$ а при выполнении алгоритма C оно пропорционально $c_2 \cdot g+g \cdot \log g$, где $1 < c_2 < 2$.

5. Задача применения

При проверке несмонтированных печатных плат возникла следующая задача: по описанию участков проводников печатной платы установить гальванически связанные участки проводников и точки. Прежде чем выбрать алгоритм, самый подходящий для решения задачи, рассмотрим способ описания участков проводников печатной платы.

Каждая точка $Q(i)$ печатной платы задается с координатами x, y прямоугольной системы координат, прикрепленной к плате, с прочими, оценивающими данными как, например, данными, относящимися к положению и технологии точки и т.д. Первая точка снабжена меткой начальной точки, последняя точка меткой конечной точки, а между ними находящиеся точки меткой промежуточной точки. Участок проводника в вырожденном случае может состоять из одной точки. В этом случае точке приписывается метка одинокой точки. Печатная плата может быть задана с линейным списком Q , состоящий из описания подряд заданных участков проводников.

Значит, один элемент списка Q состоит из следующих полей:

$$Q(i): \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{QUAL} & \text{TECHN} & X & Y \\ \hline \end{array}$$

где $QUAL(i)=1$ если точка является начальной точкой участка,

$=2$, если точка является конечной точкой,

$=3$, если точка является одинокой точкой,

$=4$, если точка является промежуточной точкой,

$TECHN(i)$ – содержит технологическую информацию,

$X(i)$ – координата x точки,

$Y(i)$ – координата y точки.

В списке Q , хотя бы один раз имеется каждая точка печатной платы, т.е. множества H , встречающегося в алгоритмах.

Бинарное отношение R понимается по следующему:

R1. $Q(i) R Q(i+1)$, если совпадает $(QUAL(i), QUAL(i+1))$ с каким то из векторов $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,2)$.

R2. $Q(i) R Q(r)$ где r произвольное,
если $X(i)=X(r)$ и $Y(i)=Y(r)$.

R3. $Q(i) R Q(t)$ ($t \neq i+1$)
если $Q(i) R Q(i+1)$ и $Q(t)$ принадлежит отрезку $(Q(i), Q(i+1))$ (см. рис.2).

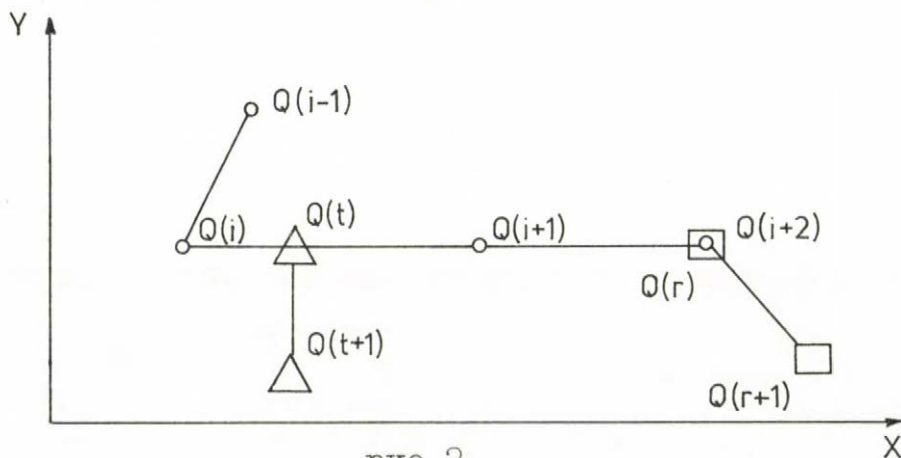


рис.2

Для решения состоятельности R3 для всех $(Q(i), Q(i+1))$, для которых $Q(i) R Q(i+1)$ необходимо проверить в списке Q имеется ли $Q(t)$ принадлежащий отрезку $(Q(i), Q(i+1))$. Проводники на некоторых платах могут иметь четыре возможных (главных) направления, именно участок проводника $(Q(i), Q(i+1))$ может иметь наклон по оси x под углом $k \cdot 45^\circ$ ($k = 0, 1, 2, 3$). На рис. 2 в порядке $(Q(i), Q(i+1))$, $(Q(i-1), Q(i))$, $(Q(t), Q(t+1))$, $(Q(r), Q(r+1))$. Соответственно этому для решения состоятельности R3 целесообразно упорядочить элементы Q по четырем направлениям. В этом случае R3 выполняется тогда, если на упорядочение T_k по направлению $(Q(i), Q(i+1))$

$$\exists t(Q(i+s) T_k Q(t) \ \& \ Q(t) T_k Q(i+|s-1|))$$

где $s=0$ или 1. Для осуществления упорядочений T_k из координат x,y генерируем код XY_k , способный для упорядочения точек плоскости в направление под углом $k \cdot 45^\circ$ ($k = 0, 1, 2, 3$).

Учитывая все вышеописанные, для решения задачи из описанных алгоритмов, самым естественным считается применение алгоритмов B и C. В случае алгоритма B список Q соответствует списку R так, чтобы поле QUAL списка Q соответствует полю QUAL алгоритмов B и C, поле X полю INFO (содержимое его актуальный код XY_k), а поле Y полю LINK. В поле LINK находится сцепление точек по величине T_k . Заметим еще, что содержимое поля TECHN после выполнения алгоритма легко восстанавливается.

Схема модифицированного алгоритма B, приспособленного для задачи следующая:

- B1. Генерация кода по соответствующему главному направлению и запись его в поле X ;
- B2. Упорядочение генерированных кодов по отношению \leq и сцепление их указателями поля Y ;

- В3. С помощью цепи указателей, досмотр списка и там, где содержимые полей X совпадают или, где участку принадлежат другие точки, те участки проводников сцепятся в кольцо;
- В4. Осуществлено ли кодирование по всем четырем направлениям?
Если да, то алгоритм завершен,
если нет, то следует шаг В1.

Схема алгоритма С, приспособленного для задачи:

Примечание: в алгоритме С необходимы следующие изменения:

- В шагу 6: если участок $(Q(IND), Q(IND+1))$ не параллелен с обрабатываемым направлением или если $P \notin QVAL(IND)$, то следует шаг 4.
- В шагу 7: состоятельность T_R требуется проверить только тогда, если $LINK(IND) \neq IND+1$ или $LINK(IND+1) \neq IND$. T_R выполняется для всех точек, лежащих по цепи $LINK(IND+s) - IND+|s|-1$ ($s = 0$ или 1).
- С. Заполнение полей CYCLE;
- С2. Совпадает с В1;
- С3. Совпадает с В2;
- С4. Обход списка Q алгоритмом С, который по точкам, принадлежащим участкам испытываемого направления сцепит в кольца последовательности Q_i ;
- С5. Если все направления обработаны, то стоп,
- С6. Стирание меток F и следует шаг С2.

S U M M A R Y

Three algorithms with polynomial complexity are given for an NP type problem. The problem arose in the field of electronic CAD.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ramamoorthy C.V.: Connectivity Consideration of Graph Representing Discrete Sequential Systems. IEEE Trans. Electr. Comp. October 1965. pp. 724-727.
- 2 Berztiss A.T.: Data Structures. Theory and Practice. Academic Press, 1971.
- 3 Bollobás B.: Extremal Graph Theory. Academic Press, 1978.
- 4 Knuth D.E.: The Art of Computer Programming. Vol. 1: Fundamental Algorithms. Addison-Wesley, 1973.
- 5 Pásztorné Varga K.: Egy halmaz elemeinek ekvivalenciaosztályba sorolása bináris relációk alapján veremtechnika alkalmazásával. MTA SzTAKI Working Paper.

НОВЫЙ, ГИБКИЙ МЕТОД ДЛЯ ПРОВЕРКИ НЕСМОНТИРОВАННЫХ ПЕЧАТНЫХ ПЛАТ

Каш И., Палоташи А., Ужоки М., Вёрёш К.

Введение

При производстве печатных плат с помощью сцепляющейся последовательности производственных фаз и проверок, достижима годность к монтажу готовых печатных плат. В следствие технологических ошибок производства часто могут возникать между соседними проводами короткие замыкания, а между равнопотенциальными узлами разрыв.

Учитывая большое число таких ошибок, большой производственный объем печатных плат, также распространение БИС и плат с мелкой печатью можно сказать, что выбор ошибочных элементов в позднейшей фазе производства без значительного увеличения затрат не осуществимо.

Из этого факта следует необходимость разработки устройств, способных для автоматической функциональной проверки несмонтированных печатных плат, т.е. для обнаружения и определения места коротких замыканий и разрывов проверяемой трассировки.

1. Теоретическое определение задания

Пусть будет печатная трассировка конечным ориентированным графом $G(V, E)$. Пусть множество всех вершин V графа соответствует множеству всех проверяющих точек печатной трассировки, также множество всех ребер E графа соответствует множеству всех участков проводников, соединяющих проверяющие точки. Из-за физических причин ограничимся: граф без петель и в нем нет кратных ребер. $|G|$ – порядок графа, т.е. число элементов множества V будет N . Для элементов множества V

определим отношение достижимости ρ известным способом:

$V_i \rho V_j$ т.е. вершина $V_j \in V$ достижима из вершины $V_i \in V$ если существует путь от V_i до V_j . Легко видеть — это отношение в случае неориентированного графа является рефлексивным, симметричным и транзитивным, поэтому и отношением эквивалентности. С помощью отношения ρ элементы множества V могут быть упорядочены в классы эквивалентности. Классы эквивалентности соответствуют тем точкам сети, которые имеют одинаковый потенциал, т.е. плоскостям потенциалов. Число классов эквивалентности k соответствует числу плоскостей потенциалов m .

В дальнейшем определим матрицы смежности и достижимости графа G [1]. Матрицей смежности $A=[a_{\mu\nu}]$ графа G , имеющего N вершин является такая квадратная матрица порядка N , в которой $a_{\mu\nu}=1$, если между вершинами V_μ и V_ν ($V_\mu, V_\nu \in V$) существует ребро, иначе $a_{\mu\nu}=0$. По главной диагонали матрицы все элементы 0, так как граф без петель. Матрица достижимости $R=[r_{\mu\nu}]$, также есть квадратная матрица порядка N , в которой $r_{\mu\nu}=1$, если $V_\mu \rho V_\nu$ ($V_\mu, V_\nu \in V$), иначе $r_{\mu\nu}=0$. В следствие свойства рефлексивности отношения по главной диагонали матрицы все элементы единицы.

После этого определим совпадение и подобие графов G и G'

Графы G и G' совпадающие $G=G'$, если между их вершинами можно установить такое соответствие, чтобы в графе G' две вершины, тогда и только тогда соединены ребром, если в графе G соответствующие вершины соединены ребром.

Графы G и G' подобны $G \approx G'$, если между их вершинами можно установить такое соответствие, чтобы в графе G' две вершины, тогда и только тогда достижимы одна из другой, если в графе G соответствующие вершины достижимы одна из другой.

Из определений вытекает эквивалентность и следующие выводы:

$$G=G' \leftrightarrow A=A'$$

и

$$G \simeq G' \leftrightarrow R=R'$$

Так как из матрицы смежности однозначно определима, матрицу достижимости можно написать:

$$G=G' \rightarrow G \simeq G'$$

Обозначим через $\bar{G}=(V, \bar{E})$ граф дополнения графа G , где \bar{E} — множество ребер графа дополнения. Определим для графа G следующие две операции [2]:

- удаление ребра $e_i \in E$ из графа G , результат которой обозначается через $G - e_i$
- подключение ребра $e_j \in \bar{E}$ к графу G , результат которой обозначается через $G + \bar{e}_j$

Посмотрим граф G' , образованный из графа G следующим образом:

$$G' = G - \sum_{i=1}^k e_i + \sum_{j=1}^l \bar{e}_j$$

где k, l натуральные числа, для которых выполняется $0 \leq k \leq |E|$ и $0 \leq l \leq |\bar{E}|$. В графах G и G' вершины имеют одинаковую нумерацию.

Очевидно, что граф G' является моделью, а граф G образцом, проверяемой печатной платы. После этого, проверка графа G' означает испытание графов G и G' либо на совпадение и либо на подобие.

Если графы G и G' сравним с точки зрения их совпадения, то выполним топологическую проверку. Для топологической проверки требуются матрицы смежности обоих графов. Матрица A задана, по определению для составления матрицы A' , необходимо испытать какие из вершин графа G' соединены ребрами. Это испытание выполнимо только оптическим путем, поэтому оно довольно трудновато.

Если графы G и G' сравним с точки зрения их подобия, то выполним функциональную проверку, так как проверяется печатная плата, соответствующая графу G' с точки зрения функционирования в противоположности топологической проверке, когда сравниваются топологии обеих плат. После того, как полностью задан граф G известна и матрица достижимости R . Определение элементов матрицы R' означает определение элементов матрицы в отдельности, это в конечном счете проверка того, что между вершинами V_μ и V_ν существует ли путь или нет. Физически проверка может осуществляться, например и так, что измеряем величину сопротивления между точками V_μ и V_ν . Учитывая, что R' квадратная матрица порядка N , проверка в принципе означает $\frac{N(N-1)}{2}$ измерений.

2. Методы испытания печатной трассировки

Среди возможных процедур проверки печатной трассировки получили большое значение два метода: оптический и электрический.

В данной статье оптическими испытаниями подробнее мы не будем заниматься. Их общее свойство, требование человеческой работы, проверка с глазами или решение задачи с применением вспомогательных устройств облегчающих проверку с глазами.

Методы электрической проверки основаны на изменении электрического сопротивления. Они очень преимущественны со стороны применения по назначению плат с печатной трассировкой, так как принцип проверки совпадает с принципом их действительного функционирования.

Процедуры, основанные на изменении электрического сопротивления могут быть сгруппированы по пределам измерения сопротивления. В самом простом случае имеется один предел для оценки результата измерения между двумя точками, выше предела — разрыв, ниже предела — короткое замыкание. В наиболее часто применяемом случае заданы два предела, и считается ни-

же нижнего коротким замыканием, выше верхнего - разрывом. В третьем случае измерительным устройством результат считается правильным, если он лежит между двумя пределами как при измерении короткого замыкания, так и при измерении разрыва.

По пространственному расширению соединения измерительного устройства к измеряемой плате с печатной трассировкой, измерительные системы можно сгруппировать на 0, 1 и 2-х-мерные процедуры [3].

В 0-мерной процедуре гальваническая связь, нужная для измерения, осуществляется двумя измерительными контактами (в геометрическом смысле с двумя точками). Из-за ее потребности времени на практике она не применяется, только ради полноты упомянута.

При 1-мерном соединении измерительные контакты расположены по двум линиям при полной ширине максимальной измеряемой поверхности. Проверка платы осуществляется движением двух линий измерительных контактов вдоль платы. Это решение являлось только принципиальной возможностью, впервые применялось в дальнейшем описываемом устройстве BARETEST.

В 2-мерном способе полная измеряемая поверхность покрыта измерительными контактами. Эта означает то, что измерительные контакты расположены в определенных точках плоской поверхности либо в каждой точке растра, либо в точках, соответствующих проверяющим точкам измеряемого объекта. В настоящее время этот метод соединения общераспространен.

Каждый способ имеет преимущества и недостатки, в том числе и 2-х-мерный способ соединения. Преимуществом его считается быстрота, так как скорость измерения определяется, кроме операций зажатия, временами работ электронных деталей. Недостатком его считается сильная зависимость от размеров платы, требуется большая схемная выстроенность и так использо-

вания большого количества деталей (переключательные схемы, измерительные зонды, кабеля).

3. Исследование алгоритмов измерений

Для выполнения процесса измерения применяя 1-мерное соединение требуется механическое движение. Так как оно всячески приводит к потере времени в отношении устройств, применяющих 2-х-мерное соединение контактов, поэтому для того, чтобы уменьшение скорости не стало тяжелым необходимо испытать возможности уменьшения числа измерений. Это в конечном счете начинается исследование алгоритмов измерений.

В устройствах, применяющих 2-х-мерное соединение, за исключением некоторых, конструкторы не придают значение алгоритму измерений и применяется тривиальный алгоритм. Этот алгоритм - "каждую точку к каждой точке". Так как результат измерения не изменяется, если от точки P_i до точки P_j или наоборот, производится измерение таким образом число измерений алгоритма будет

$$S_1 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

где n - число измеряемых точек.

Так как данный алгоритм сравнивает каждую точку с каждой точкой, кажется естественным, что алгоритмом обнаруживаются все ошибки не смотря на их вид и определяются те точки плоскостей потенциалов, между которыми имеется разрыв или короткое замыкание. К сожалению это не так. Если, например, между двумя проверяемых точек больше одного разрыва "включены подряд", то алгоритмом обнаруживается только один, или если между двумя плоскостями потенциалов имеется два коротких замыкания таким образом, чтобы на одной из плоскостей есть и разрыв между двумя короткими замыканиями, то алгоритмом обнаруживается только короткое замыкание между двумя плоскостями потенциалов. Также легко видеть о коротком замыкании,

имеющимся между двумя в отдельности без ошибки плоскостями потенциалов алгоритмом дается информация только о коротком замыкании, но не дается о том, между какими проверяющими точками находится ошибочная связь.

Как видно, даже проверочный алгоритм "каждую точку к каждой точке" не дает нам сообщение при некоторых сочетаний ошибок ни о конкретном месте, ни о существовании некоторых элементов ошибки. Поэтому правильнее установить требования к алгоритму так, чтобы он обнаружил хотя бы один элемент ошибки во всех сочетаниях ошибок и он задал место обнаружения ошибки относительно одной отличительной точке плоскости потенциала.

Это сочинение принято нами не только из-за того, что мы не знали лучшее, но и потому, что шаг проверки качества состоит из последовательности циклов "измерение-ремонт-измерение", выход из которых возможен после получения безошибочного результата фазы измерения. Эта цикличность обеспечивает обнаружение всех ошибок. Естественно не целесообразно снизить не только число измерений, чтобы резко снизилась обнаруживающая способность алгоритма, и тем самым увеличилось число циклов "измерение-ремонт-измерение" или сообщение об ошибках стало настолько сжатым, чтобы оценка его слишком затруднялась.

С учетом этих требований можно создать почти десять, пятнадцать алгоритмов, из которых мы опишем несколько.

Одна из возможностей для испытания сети произвести измерения по всем простым точкам относительно отличительных точек плоскостей потенциалов таким образом, чтобы измерения между отличительными точками в одной последовательности измерения попарно встретились всего один раз. Этот алгоритм приводит к значительному уменьшению числа измерений, так как число измерений в зависимости от числа измеряемых точек растет не квадратично, а линейно [4].

$$S_2 = \sum_{i=1}^m (n-i) = n \cdot m - \frac{n(m+1)}{2}$$

где n — число измеряемых точек,
 m — число плоскостей потенциалов,
 i — номер плоскостей потенциалов.

Другая возможность для выполнения последовательности измерений, произвести измерение по всем простым точкам относительно отличительных точек плоскостей потенциалов, но таким образом, чтобы те плоскости потенциалов по отличительным точкам которых измерения произведены, исключаются из дальнейшей последовательности измерений. К этому алгоритму принадлежит следующее число измерений:

$$S_3 = m(n-1) - \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)n_i$$

где n_i — число испытывающих точек i -той плоскости потенциала.

Из равенства очевидно, что значение S будет минимальным, если значение второго члена равенства будет максимальным. Так как для заданной трассировки m постоянное максимум можно достичь, если малым значениям i принадлежат большие значения n_i .

К дальнейшему уменьшению числа измерений приводит измерение изолированности друг от друга плоскостей потенциалов, между их отличительными точками. А проверку непрерывности внутри плоскостей потенциалов можно осуществить либо измерением каждой точки к каждой точке, либо только к отличительным точкам плоскости потенциала. В последнем случае дается число измерений:

$$S_4 = n-m + \frac{m(m+1)}{2}$$

К очень грубому уменьшению числа измерений приводит алгоритм, который описан M.R. Gorey и D.S. Johnson [5], в котором испытание изолированности между плоскостями потенциалов выполняется созданием групп между плоскостями потенциалов. В одну группу зачисляют те плоскости потенциалов, которые из-за

структуры печатной трассировки не смогут иметь короткое замыкание между собой. Внутри отдельных групп создается искусственно временная связь между отдельными плоскостями потенциалов. Затем из каждой группы выбирается одна точка, точка-представитель, которая будет общей отличительной точкой группы и для этих общих отличительных точек производятся измерения каждую к каждой.

Предполагая, что из плоскостей потенциалов можно образовать k групп и испытание непрерывности точек плоскостей потенциалов осуществляется измерением по своим отличительным точкам, тогда алгоритмом требуемое число измерений будет следующее:

$$S_5 = n - m + \frac{k(k-1)}{2}$$

где k — число возможно образуемых групп из плоскостей потенциалов.

Естественно, произвольно не любой алгоритм выбирается для любой технической реализации. Тщательно нужно обдумывать при данной системе соединения какой алгоритм является самым выгодным. В BARETEST применяется алгоритм S_4 , по которому число измерений относительно необходимому числу измерений тривиального решения S_1 приблизительно десятая доля.

Таким образом, сниженное число измерений, можно снизить приблизительно еще на 20% различными способами. Например, не требуется произвести измерение изолированности по тем плоскостям потенциалов, в которых нет перекрытия между их покрывающими прямоугольниками или нет перекрытия в их проекциях по оси x .

4. Короткое сообщение о новом 1-мерном испытывающем устройстве печатной трассировки

Новейшая часть испытывающего устройства — рабочая площадка,

которая состоит из стола, способного для установки несмонтированной платы печатной трассировкой максимальным размером 600 мм на 600 мм. Параллельно одним ребром стола смонтированы два передвижных моста. Мосты в направлении другого ребра стола могут передвигаться таким образом, чтобы останавливаться по делениям раstra и они могут приближаться друг к другу на одно деление раstra. На обоих мостах в делениях раstra, установлены 240 измерительных контактов. На контакты одного моста можно подключить и датчик измерительного напряжения и приемник, пока на контакты другого моста только приемник. Гальваническое соединение между измерительной электроникой и измеряемой платой осуществляется вертикальным перемещением мостов. Горизонтальное и вертикальное движения мостов, которые соответствуют вышеописанному алгоритму измерений, создаются шаговыми двигателями с подходящим управлением. Исполнение рабочей площадки такое, что максимум до 504 контактов измерения можно произвести на соединяющих контактах платы.

Измерительный автомат способен для измерения сети, состоящей максимум из 16 тысяч точек. Данные хранятся в динамической памяти объемом 16 кслов, где одно слово состоит из 17 разрядов. В одном слове 8 разрядов для координаты x , 8 разрядов для координаты y измеряемой точки, а оставшийся один разряд служит для обозначения начала различных плоскостей потенциалов.

BARETEST содержит микропроцессор типа Z 80. Назначение микропроцессора: принятие различных решений, организация высокоскоростных программируемых целевых аппаратур или выполнения заданий, не входящих в область работы целевых аппаратур.

Устройство способно работать в режимах ON/OFF LINE и AUTO-PROGRAMMING.

Информацию для управления можно создать из двух источников,

с одной стороны из геометрического технологического списка (ГТС), выработанного входе автоматического проектирования плат с печатной трассировкой, с другой стороны с образца.

В первом случае из ГТС, который содержит геометрические (расположение проводов и точек) и технологические (толщина участков проводов и функция точек) данные нанесенной на плату трассировки с помощью программы вырабатывается список плоскостей потенциалов (СПП). СПП - последовательность плоскостей потенциалов, заданных со своими испытывающими точками. Из СПП постпроцессорной программой вырабатывается управляющая информация, воспринимаемая устройством.

Во втором случае с образца, в режиме AUTOPROGRAMMING устройством самостоятельно генерируется управляющая информация, необходимая для измерений.

Заключение

Подводя итоги можно установить, что разработанное устройство, применяющее геометрически 1-мерное соединение в отношении устройства, использующих 2-х-мерное соединение обладает следующими преимущественными свойствами:

- числа дорогих переключательных схем и измерительных контактов на порядки меньше;
- универсальное как по размерам плат, так и по внутренней конфигурации;
- положение соединений на измеряемой плате без ограничений;
- экономичное в случае мелких и средних серий производства, но применяемое и при больших сериях.

S U M M A R Y

In the present paper a new testing method of bare PCB1 is discussed. In mathematical formulation of the problem the printed wiring network is regarded as a set of points and links. The so-called 0-, 1- and 2-dimension testing methods based on the measurement of electric resistance are surveyed and some algorithms suitable for realization of the measurement series are presented. The application of the above concept in practice including the measuring system developed is shortly described.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Deo N.: Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science. Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J. 1974.
- 2 Harary F.: Graph Theory. Addison-Werley Reeding, Massachusetts 1969.
- 3 Csaba L., Kas I., Palotási A., Vörös K.: Some Problems and their Solution in Testing of Bare PCBs. Fault-Tolerant Systems and Diagnostics Conf., Brno september 18-20 1979.
- 4 Milkovic N.: Verdraktungstester - ein Specialgebiet der Netzwerkanalyse. Elektronik Basis; Vogel-Verlag Würzburg 11. Jahrgang, Heft, 78/August 1976.
- 5 Gorey R., Johnson D.: An Application of Graph Coloring to Printed Circuit Testing. IEEE 1976.

СПИСОК АВТОРОВ

Асланян, Л.А.	51	Aszlanjan, L.A.
Дабринян, С.Х.	131	Dabrinjan, Sz.H.
Эсенски, Й.	111	Eszenszki, J.
Гюлумян, С.М.	119, 123	Gjulumjan, Sz.M.
Индженян, С.Г.	145	Indzsenjan, Sz.G.
Караханян, В.М.	39	Karahanjan, V.M.
Каш, И.	183	Kas, I.
Мате, Л.	111	Máté, L.
Никогосян, Ж.Г.	153	Nyikogoszjan, Zs.G.
Палоташа, А.	183	Palotási, A.
Пасторне-Варга, К.	5, 87, 101, 169	Páosztorné-Varga, K.
Петросян, А.В.	15	Petroszjan, A.V.
Полачек, К.	111	Polacsek, K.
Ревилки, Й.	111	Reviczky, J.
Штраус, Е.	111	Strausz, É.
Сомор, П.	169	Szomor, P.
Турчани, Д.	111	Turchanyi, Gy.
Ужоки, М.	5, 87, 101, 183	Uzsoky, M.
Вереш, К.	183	Vörös, K.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
К.Пасторне-Варга, М.жоки: ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВОЧНОЕ РАСШИРЕНИЕ ДВУЗНАЧНЫХ /БУЛЕВЫХ/ ФУНКЦИЙ	5
А.В.Петросян НЕКОТОРЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ Караханян, В.М.	15
МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В КЛАССЕ ШАРОВЫХ ПОКРЫТИЙ	39
Асланян, Л.А. К ВОПРОСУ МИНИМИЗАЦИИ СИСТЕМ СЛАБО ОПРЕДЕЛЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ	51
К.Пасторне-Варга, М.Ужоки ГЕНЕРАЦИЯ ТЕСТОВ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ БЛОКОВ, СОСТОЯЩИХ ИЗ СИС И БИС	87
К.Пасторне-Варга, М.Ужоки ВОЗМОЖНЫЙ ПОДХОД И ПРОВЕРКЕ ПОЛНОТЫ ТЕСТА	101
Л.Мате, Й.Эсенски, К.Полачек, Й.Ревички, Е.Штраус, Д.Турчани ЛОКАЛИЗАЦИЯ ОШИБОК БЕЗ ЛОКАЛИЗИРУЮЩИХ ТЕСТОВ	111
Гюлумян, С.М. ЧИСЛО ВЕРШИННОГО k -ПОКРЫТИЯ ГРАФА	119
Гулумян, С.М. КРИТИЧЕСКИЕ И МИНИМАЛЬНЫЕ k -РЕБЕРНО СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ...	123
Дабринян, С.Х. ОЦЕНКА ДЛИН КОНТУРОВ И ПУТЕЙ В РЕГУЛЯРНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ ГРАФОВ	131
Инджеян, С.Г. ДВЕ ТЕОРЕМЫ О БИХРОМАТИЧНОСТИ ПЛОСКИХ ГИПЕРГРАФОВ ..	145
Ж.Г.Никогосян n -КАРКАСНЫЕ И ГИПО- n -КАРКАСНЫЕ ГРАФЫ	153

К.Пастор-Варга, П.Сомор	
АЛГОРИТМЫ ДЛЯ УПОРЯДОЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МНОЖЕСТВА В	
КЛАСС ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ НА ОСНОВАНИИ БИНАРНЫХ	
ОТНОШЕНИЙ	169
Каш, И., Палоташи, А., Ужоки, М., Вереш, К.	
НОВЫЙ, ГИБКИЙ МЕТОД ДЛЯ ПРОВЕРКИ НЕСМОНТИРОВАННЫХ	
ПЕЧАТНЫХ ПЛАТ	183
СПИСОК АВТОРОВ	195

A TANULMÁNSOROZATBAN 1981-BEN MEGJELENTEK:

- 116/1981 Sieglér András: Egy 6 szabadságfokú antropomorf manipulátor kinematikája számítógépes vezérlése
- 117/1981 Knuth Előd—Radó Péter: Principles of Computer Aided System Description
- 118/1981 Demetrovics János—Gyepesi György: Általános függőségek és lekérdezéssel kapcsolatos algoritmusok relációs adatmodellekben
- 119/1981 Sztanó Tamás: REAL—TIME programrendszerek eseményvezérelt szervezése
- 120/1981 Szentgyörgyi Zsuzsa: A számítástechnika műszaki fejlődése és társadalmi hatásai
- 121/1981 Vicsek Tamásné (Strehó Mária): Vizsgálatok a kezdeti érték problémák numerikus megoldásával kapcsolatban
- 122/1981 Andó Györgyi—Lipcsey Zsolt: Sztochasztikus Ljapunov módszerek és alkalmazásaik
- 123/1981 Márkus Zsuzsanna: Intelligens interaktív rendszerek elvi problémái
- 124/1981 Márkus Zsuzsanna: Logikai alapú programozási módszerek és alkalmazásaik számítógéppel segített építészeti tervezési feladatok megoldásához
- 125/1981 Fabók Julianna: Software implementációs nyelvek
- 126/1981 Várszegi Sándor: Multimikroszámítógépes-rendszerek
- 127/1981 Lipcsey Zsolt: N-személyes minőségi differenciáljátékok késleltetéssel és késleltetés nélkül
- 128/1981 Böszörményi László: Multa-task rendszerek fejlesztése magasszintű nyelven
- 129/1981 Tóth János: A formális reakciókinetika globális determinisztikus és sztochasztikus modelljéről és néhány alkalmazásáról

A TANULMÁNY SOROZATBAN 1982-BEN MEGJELENTEK:

- 130/1982 Barabás Miklós – Tőkés Szabolcs: A lézer printer-képképzés hibái és optikai korrekciójuk
- 131/1982 RG-II/KNVVT "Szzstemü upravlenija bazani dannüh i informacionnue szisztemü" Szbornik naucsno-iszzledovatel'szkih rabot rabocsej gruppü RG-II KNVVT, Budapest, 1979. Tom I.
- 132/1982 RG-II KNVVT Tom II.
- 133/1982 RG-II KNVVT Tom III.
- 134/1982 Knúth Előd – Rónyai Lajos: Az SDLA/SET adatbázis lekérdező nyelv alapjai (oroszúl)

1987 JUL 2 7